

Développements asymptotiques combinés et points tournants d'équations différentielles singulièrement perturbées

A. FRUCHARD et R. SCHÄFKE, 30 avril 2010

1 Résumé.

L'objet de ce mémoire est d'élaborer une théorie de développements asymptotiques pour des fonctions de deux variables, qui combinent à la fois des fonctions d'une des deux variables et des fonctions du quotient de ces deux variables. Ces *développements asymptotiques combinés* (DAC en abrégé) se révèlent particulièrement bien adaptés à la description des solutions d'équations différentielles ordinaires singulièrement perturbées au voisinage de points tournants. Décrivons le contexte en quelques mots. Etant donnée une équation de la forme

$$\varepsilon y' = \Phi(x, y, \varepsilon) \quad (1.1)$$

où Φ est de classe C^∞ , x et y sont des variables réelles ou complexes et ε est un petit paramètre, réel positif ou dans un secteur du plan complexe, nous appelons *point tournant* un point (x^*, y^*) de la *variété lente* \mathcal{L} d'équation $\Phi(x^*, y^*, 0) = 0$, tel que $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x^*, y^*, 0) = 0$.

Au voisinage d'un *point régulier* (\tilde{x}, \tilde{y}) de \mathcal{L} , i.e. tel que $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}, 0) \neq 0$, on vérifie facilement que (1.1) a une unique solution formelle $\hat{y} = \sum_{n \geq 0} y_n(x) \varepsilon^n$ et il est connu que les solutions de (1.1) admettent \hat{y} pour développement asymptotique dans des domaines adéquats. La théorie *classique* des développements combinés permet aussi de décrire la *couche limite* (appelée aussi la *couche intérieure*) d'une solution ayant en \tilde{x} une valeur initiale assez proche de \tilde{y} . Par exemple dans le cadre réel, si le point (\tilde{x}, \tilde{y}) est *attractif*, i.e. $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}, 0) < 0$, on peut donner une approximation d'une solution $y = y(x, \varepsilon)$, uniforme sur un intervalle $[\tilde{x}, \tilde{x} + \delta]$, sous la forme $\sum_{n \geq 0} \left(y_n(x) + z_n \left(\frac{x - \tilde{x}}{\varepsilon} \right) \right) \varepsilon^n$, comportant d'une part la solution formelle \hat{y} et d'autre part des fonctions z_n à décroissance exponentielle à l'infini.

En un point tournant (x^*, y^*) , en général les coefficients de la solution formelle présentent des singularités de type pôle ou ramification et cette méthode des développements combinés classiques n'est plus applicable. La méthode la plus répandue pour obtenir une approximation des solutions est le recollement de deux développements dits *intérieur* et *extérieur*. C'est ce qu'on appelle le *matching* dans la littérature anglo-saxonne. Plus qu'une méthode, le matching est une idée très générale, qui regroupe des méthodes

diverses dans de nombreuses situations où apparaissent à des équations fonctionnelles (différentielles ordinaires, aux dérivées partielles, etc.)

L'objet du mémoire est de présenter de nouveaux DAC, de la forme $\sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n \left(\frac{x - x^*}{\eta} \right) \right) \eta^n$. Dans le cadre des équations de la forme (1.1), la variable η est une racine du petit paramètre ε et les fonctions a_n (la partie dite *lente* du DAC) sont liées aux fonctions y_n de la solution formelle \hat{y} mais ne leur sont pas égales : ce sont les parties régulières de ces fonctions y_n . De manière symétrique, la partie *rapide* du DAC, constituée des fonctions g_n , correspond à la partie régulière à l'infini de la solution formelle de l'équation *intérieure* obtenue par le changement de variable $x = \eta X$. L'avantage des développements combinés est de donner une approximation uniforme des solutions dans une région contenant à la fois des points loin du point tournant et des points dans un petit voisinage de ce point tournant.

Nous présentons deux méthodes pour obtenir ces DAC. La première est une méthode directe selon le modèle classique : étude de solution formelles, puis preuve d'existence d'une solution analytique ayant cette solution formelle pour DAC. La deuxième méthode est plus indirecte et utilise un résultat de type Ramis-Sibuya : nous montrons d'abord qu'il existe des solutions de (1.1) pour ε et pour x dans des secteurs formant des recouvrements de l'origine, puis que ces solutions satisfont des estimations exponentielles. Cette méthode complexe peut sembler bien sophistiquée à un lecteur habitué au contexte des équations dans le champ réel, mais elle est la plus simple à notre connaissance pour la perturbation singulière. Par ailleurs, cette construction par des recouvrements a le mérite de fournir gratuitement des estimations de type Gevrey, non seulement pour le développement mais aussi pour les développements asymptotiques des fonctions g_n . Le lien étroit entre la perturbation singulière et la théorie Gevrey est connu ; parmi les trois applications que nous présentons, deux utilisent de manière incontournable le Gevrey.

En dépit du caractère naturel, presque familier, de ces développements, nous n'en avons trouvé presque aucune trace dans la littérature existante. En particulier leur similitude apparente avec les DAC classiques cache des différences profondes. La comparaison de nos résultats avec l'abondante littérature sur les développements combinés classiques et le matching sera mentionnée au fur et à mesure du mémoire, ainsi qu'à la fin. Dans ce mémoire, l'accent est mis sur les équations différentielles ordinaires, mais nous sommes convaincus que ces DAC peuvent se révéler très utiles pour d'autres types d'équations fonctionnelles.

Mots-clés : point tournant, développement asymptotique combiné, série Gevrey, canard, perturbation singulière, équation différentielle complexe.

Classification AMS : 34E, 30E10, 41A60, 34M30, 34M60.

Table des matières

1 Résumé.	1
2 Quatre exemples introductifs.	2
2.1 Premier exemple.	2
2.2 Extensions.	5
2.3 Deuxième exemple.	6
2.4 Troisième exemple.	7
2.5 Quatrième exemple.	8
2.6 Les développements combinés.	9
3 Développements asymptotiques combinés : étude générale.	9
3.1 Notations.	9
3.2 Séries formelles combinées.	10
3.3 Développements combinés.	12
3.4 Développements combinés et “matching”.	14
3.5 Prolongements de développements combinés.	17
3.6 Quotients de DAC et une extension.	18
4 Développements asymptotiques combinés : étude Gevrey.	20
4.1 Séries formelles combinées Gevrey.	20
4.2 Développements asymptotiques combinés Gevrey.	22
4.3 Fonctions plates Gevrey.	24
4.4 Théorèmes de type Borel-Ritt.	26
4.5 Bons recouvrements cohérents.	27
5 Un théorème de type Ramis-Sibuya.	29
5.1 Énoncé du théorème et début de la preuve.	29
5.2 La partie lente.	31
5.3 La partie rapide.	32
5.4 Étude des fonctions g_n^j	33
5.5 Le cas μ négatif.	34
5.6 Composition d’un DAC Gevrey par une fonction analytique.	35
6 Développements combinés et équations différentielles singulièrement perturbées.	36
6.1 DAC classiques en un point régulier.	37
6.2 DAC en un point tournant : le cas quasi-linéaire.	40
6.2.1 Solutions formelles combinées.	40
6.2.2 Solutions analytiques et DAC.	42
6.2.3 Le caractère Gevrey des DAC.	45
6.2.4 Remarques et extensions.	47

6.3 DAC en un point tournant : généralisations.	48
---	----

7 Applications.	54
7.1 Canards en un point tournant multiple.	54
7.2 Canards non lisses.	57
7.3 Résonance d’Ackerberg-O’Malley.	62

8 Remarques historiques.	69
---------------------------------	-----------

2 Quatre exemples introductifs.

Nous présentons ici des exemples, les plus simples possibles, qui montrent que les solutions d’équations singulièrement perturbées ont naturellement des DAC près des points tournants. Les quatre exemples sont des équations linéaires. Le premier exemple est le plus simple présentant un point tournant. Le deuxième contient un paramètre de contrôle, permettant de « chasser le canard ». Le troisième exemple contient aussi un paramètre de contrôle mais le point tournant n’est plus simple, ce qui a pour conséquence que les canards ne sont pas des solutions surstables au sens de Guy Wallet [40]. Enfin le quatrième exemple concerne des « faux canards » : la courbe lente est d’abord répulsive puis attractive. Dans cette situation, toute solution de condition initiale bornée au point tournant est définie et bornée sur un intervalle contenant ce point tournant, mais pour que cette solution ait un DAC, il faut au moins que cette condition initiale ait un développement en puissances de η . Nous verrons que cette condition nécessaire est aussi suffisante.

2.1 Premier exemple.

Commençons par l’équation

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = 2xy + \varepsilon g(x), \quad (2.1)$$

où $\varepsilon > 0$ est le petit paramètre et x, y sont des variables réelles. On suppose que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^∞ et bornée, ainsi que toutes ses dérivées. Ces hypothèses sont là pour simplifier la présentation, mais beaucoup des résultats qui suivent sont valables avec des hypothèses plus faibles. Par exemple l’existence de la solution y^- ci-dessous n’utilise que la continuité de g et pour montrer que cette solution a localement un développement asymptotique à l’ordre de N , il suffit que g soit de classe \mathcal{C}^N .

Avec des modifications mineures, on peut aussi traiter le cas d’un intervalle fini ou de fonctions non bornées. Par ailleurs, la présentation de cet exemple pourrait se faire dans le cadre complexe, ce qui correspondrait mieux à l’esprit du mémoire. Cependant, nous tenons à présenter ces exemples dans le cadre réel pour bien illustrer le fait que ces DAC sont aussi très utiles dans ce

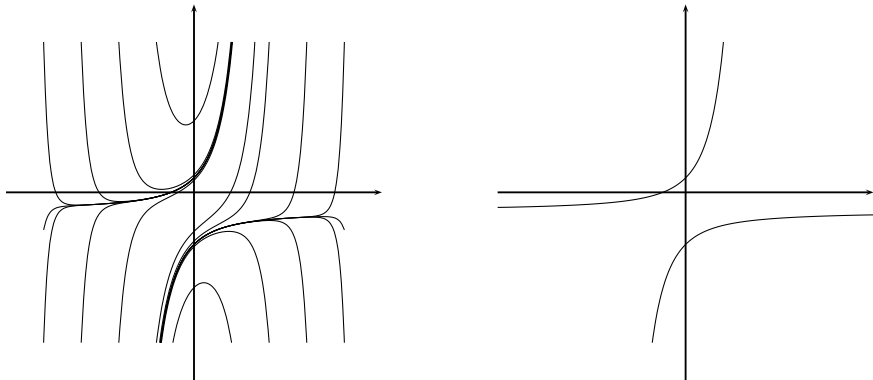


FIGURE 2.1 – Quelques solutions de (2.1) avec $\varepsilon = 1$, $|x| \leq 4$, $|y| \leq 4$ et $g(x) = x + 1$. À droite, les solutions y^- et y^+ .

cadre. Les applications présentées dans la partie 7 ont d'ailleurs leur origine dans le réel.

Puisque l'équation (2.1) est linéaire, ses solutions sont définies sur tout \mathbb{R} . La courbe lente mentionnée dans l'introduction est ici $y = 0$; elle est attractive pour $x < 0$ et répulsive pour $x > 0$. L'équation (2.1) présente un point tournant simple en $x = 0$. Pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé, on peut voir qu'il existe une unique fonction $y^-(\cdot, \varepsilon)$ bornée sur \mathbb{R}^- qui est solution de (2.1) pour la valeur ε du petit paramètre. Cette solution est donnée par la formule de variation de la constante

$$y^-(x, \varepsilon) = e^{x^2/\varepsilon} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/\varepsilon} g(t) dt. \quad (2.2)$$

Puisque dans ce mémoire ε est une variable, ce que nous appelons “solution” est en fait une famille de solutions dépendant de ε . La formule (2.2) définit une famille de solutions de (2.1) qui sont non seulement bornées sur \mathbb{R} prises isolément, mais de plus bornées uniformément par rapport à ε (ou encore, c'est une fonction des deux variables x et ε qui est bornée sur $\mathbb{R}^- \times]0, \varepsilon_0]$ pour $\varepsilon_0 > 0$ fixé). Dans toute la suite, nous utiliserons parfois l'expression “bornée” pour “bornée uniformément par rapport à ε ”.

Nous voulons avoir une description quantitative de cette solution, non seulement pour $x < 0$ mais aussi pour x proche de 0 et pour $x > 0$. Nous commençons avec le cas $x < 0$.

Par une succession d'intégrations par parties, on montre aisément que, pour tout $\delta > 0$ fixé, la solution y^- admet aussi un développement asymptotique au sens de Poincaré uniforme sur $] -\infty, -\delta[$, de la forme $\hat{y} = \sum_{n \geq 0} y_n(x) \varepsilon^n$: pour tout entier $N > 0$, il existe une constante C_N

telle que pour tout $x \in] -\infty, -\delta[$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$

$$\left| y^-(x, \varepsilon) - \sum_{n=0}^{N-1} y_n(x) \varepsilon^n \right| \leq C_N \varepsilon^N.$$

De fait, ce développement est l'unique solution formelle de (2.1); elle est donnée par les premiers termes

$$y_0(x) = 0, \quad y_1(x) = -\frac{1}{2x} g(x), \quad (2.3)$$

puis récursivement par

$$y_{n+1}(x) = \frac{1}{2x} y_n'(x), \quad n \geq 1. \quad (2.4)$$

Pour voir que \hat{y} est bien un développement asymptotique de y^- , on peut par exemple écrire $y = y^{(N)} + z\varepsilon^N$ avec $y^{(N)} = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \varepsilon^n$ et vérifier que z satisfait une équation du même genre que (2.1), donc est bornée sur la demi-droite $] -\infty, -\delta[$.

Si on remplace $-\infty$ par $+\infty$, la même formule (2.2) fournit aussi une unique solution y^+ bornée sur \mathbb{R}^+ , qui admet un développement asymptotique sur $]\delta, +\infty[$ pour tout $\delta > 0$. Puisque ce développement est l'unique solution formelle de (2.1), c'est le même que celui de y^- .

- Dans le cas très particulier où g est impaire, alors d'une part on a $y^- = y^+$ et d'autre part les formules (2.3) et (2.4) impliquent que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction y_n est paire et sans pôle en $x = 0$; ainsi la solution formelle \hat{y} reste définie en $x = 0$. Il est donc naturel de se demander si le développement commun $\sum_{n \geq 0} y_n(x) \varepsilon^n$, valide pour x loin de 0, reste valide près de 0. Dans cet exemple c'est le cas et on peut le montrer en utilisant $y^{(N)}$ comme précédemment.

Pour des équations analogues, par exemple en changeant $2x$ par $4x^3$ dans (2.1), *c.f.* 2.2.2, ce résultat n'est plus vrai. On a toujours $y^- = y^+$ et donc une solution bornée sur tout \mathbb{R} , mais les coefficients de la solution formelle admettent en général des pôles en $x = 0$ et les sommes partielles $y^{(N)}$ de \hat{y} ne peuvent plus être des approximations uniformes de y . L'équation (2.1) est l'un des exemples les plus simples où la théorie de la surstabilité peut s'appliquer. Nous ne poursuivons pas plus loin la discussion dans cette direction car nous voulons présenter les DAC et non la surstabilité.

- Lorsque g n'est pas impaire, le développement de y^+ permet toutefois d'avoir aussi une approximation de y^- sur $]\delta, +\infty[$. En effet, on a $y^-(x, \varepsilon) = y^+(x, \varepsilon) + I(\varepsilon)e^{x^2/\varepsilon}$ avec $I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/\varepsilon} g(t) dt$. Si g n'est pas impaire, alors la fonction I est non nulle. Pour voir ceci, on peut écrire

$I(\varepsilon) = \int_0^{+\infty} e^{-s/\varepsilon} (g(\sqrt{s}) + g(-\sqrt{s})) \frac{1}{2\sqrt{s}} ds$ et utiliser l'injectivité de la transformation de Laplace. Plus concrètement, si la partie paire de g — donnée par $g^+(x) = \frac{1}{2}(g(x) + g(-x))$ — n'est pas plate, alors elle satisfait $g^+(x) \sim Cx^{2N}$ avec $C \neq 0$ et $N \in \mathbb{N}$, et obtient $I(\varepsilon) \sim C'\varepsilon^{N+1/2}$. Par conséquent, en un point fixé $x > 0$, $y^-(x, \varepsilon)$ prend une valeur exponentiellement grande par rapport à ε : il existe $c, a, \varepsilon_0 > 0$ (qui dépendent de x) tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $|y^-(x, \varepsilon)| \geq c \exp\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)$.

Il est possible de décrire précisément en fonction de N le domaine où y^- reste borné et le domaine où y^- tend vers l'infini, mais nous ne faisons pas une étude exhaustive ici ; nous allons décrire $y^-(x, \varepsilon)$ en des points x de l'ordre de $\eta = \sqrt{\varepsilon}$, c'est-à-dire lorsque x et ε tendent vers 0 avec $\frac{x}{\eta}$ borné. Tout d'abord, on peut voir qu'en de tels points y^- reste bornée, et même tend vers 0. En effet le changement de variable $x = \eta X$ (avec $\eta = \sqrt{\varepsilon}$) dans (2.2) donne pour tout K réel

$$y^-(\eta X, \varepsilon) = \eta \int_{-\infty}^X e^{X^2 - T^2} g(\eta T) dT = \mathcal{O}(\eta) \quad (2.5)$$

quand $X \leq K$.

Nous allons voir que y^- admet un développement en puissances de η , mettant en jeu à la fois des fonctions de la variable lente x et de la variable rapide $X = \frac{x}{\eta}$. Ceci peut se voir par une succession d'intégrations par parties. En effet, notons Sg la fonction définie par

$$g(x) = g(0) + xSg(x). \quad (2.6)$$

Puisque g est \mathcal{C}^∞ et bornée sur \mathbb{R} , Sg l'est aussi (et même tend vers 0 à l'infini). Une première intégration par parties donne

$$\begin{aligned} y^-(x, \varepsilon) &= e^{x^2/\varepsilon} \left(g(0) \int_{-\infty}^x e^{-t^2/\varepsilon} dt + \int_{-\infty}^x e^{-t^2/\varepsilon} Sg(t) t dt \right) \\ &= g(0)\eta U^-\left(\frac{x}{\eta}\right) - \frac{\varepsilon}{2} Sg(x) + \frac{\varepsilon}{2} e^{x^2/\varepsilon} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/\varepsilon} (Sg)'(t) dt. \end{aligned}$$

avec $U^-(X) = e^{X^2} \int_{-\infty}^X e^{-T^2} dT$. En appliquant (2.5) à $(Sg)'$ au lieu de g , on a ainsi pour tout K réel

$$y^-(x, \varepsilon) = g(0)\eta U^-\left(\frac{x}{\eta}\right) - \frac{\varepsilon}{2} Sg(x) + \mathcal{O}(\eta^3)$$

quand $\eta \rightarrow 0$ uniformément sur l'ensemble des x avec $\frac{x}{\eta} \leq K$. En itérant l'intégration par parties, on obtient, avec l'opérateur S donné par (2.6) et

l'opérateur $D = \frac{d}{dx}$

$$\begin{aligned} y^-(x, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\left(\frac{1}{2} DS \right)^n g \right) (0) \eta^{2n+1} U^-\left(\frac{x}{\eta}\right) - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} S \left(\left(\frac{1}{2} DS \right)^n g \right) (x) \eta^{2n+2} + \mathcal{O}(\eta^{2N+1}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

quand $\eta \rightarrow 0$ uniformément sur l'ensemble des x avec $\frac{x}{\eta} \leq K$. Il s'agit d'un exemple de développement combiné, de la forme $\sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n^-\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$, avec ici

$$a_0 = 0, a_{2n} = -\frac{1}{2} S \left(\left(\frac{1}{2} DS \right)^{n-1} g \right), a_{2n+1} = 0 \quad (2.8)$$

et

$$g_n^- = c_n U^- \text{ avec } c_{2n} = 0, c_{2n+1} = \left(\left(\frac{1}{2} DS \right)^n g \right) (0).$$

De plus, la fonction U^- admet un développement asymptotique à l'infini, donné par

$$\begin{aligned} U^-(X) &\sim \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} 1.3 \dots (2n-1) 2^{-n-1} X^{-2n-1} \\ &= -\frac{1}{2X} + \frac{1}{4X^3} - \frac{3}{8X^5} + \dots, \quad X \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.9)$$

On a aussi une formule analogue pour la solution y^+ bornée sur \mathbb{R}^+ :

$$\begin{aligned} y^+(x, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\left(\frac{1}{2} DS \right)^n g \right) (0) \eta^{2n+1} U^+\left(\frac{x}{\eta}\right) - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} S \left(\left(\frac{1}{2} DS \right)^n g \right) (x) \eta^{2n+2} + \mathcal{O}(\eta^{2N+1}) \end{aligned}$$

avec $U^+(X) = e^{X^2} \int_{+\infty}^X e^{-T^2} dT = -U^-(-X)$. Par ailleurs, dans le cas où g est impaire, on a $(DS)^n g$ impaire pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la première partie du développement (2.7) est identiquement nulle. On retrouve ainsi le fait que y^- a un développement asymptotique classique en puissances de $\eta^2 = \varepsilon$, avec des coefficients de la variable x uniquement.

Nous sommes dans une situation proche de la définition 3.4. La principale différence est qu'ici le cadre est réel, alors que la définition 3.4 est dans le cadre complexe, mais des modifications mineures permettent de définir les solutions y^- , y^+ et les fonctions U^- , U^+ sur des secteurs contenant les demi-axes réels. Par exemple, si la fonction g est définie et analytique bornée dans une bande horizontale $S = \{x \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Im} x| < d\}$, alors on peut montrer que

la formule (2.2) avec pour chemin d'intégration la demi-droite à gauche issue de x , définit une fonction analytique dans S qui, de plus, est bornée dans $S^- = \{x \in S ; |\arg x - \pi| < \frac{3\pi}{4}\}$. Ceci permet par exemple de comparer les DAC de y^- et de y^+ dans l'intersection $S^- \cap (-S^-) = \{x \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Re} x| < |\operatorname{Im} x| < d\}$.

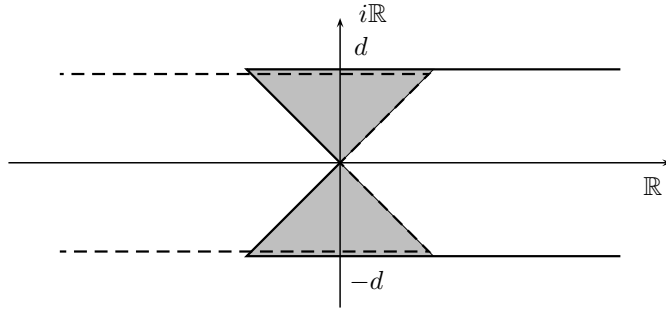


FIGURE 2.2 – Le bord de S^- en pointillés, celui de $-S^-$ en trait plein, l'intersection $S^- \cap (-S^-)$ en grisé.

À l'aide de normes de Nagumo [8], on montre facilement que le développement (2.7) est Gevrey d'ordre $1/2$ en η . Observons d'ailleurs que le développement (2.9) est aussi un développement Gevrey d'ordre $1/2$.

Notons au passage que les termes a_n et g_n^- sont nuls pour la moitié d'entre eux ; il serait donc possible de réécrire (2.7) sous forme de séries en puissances de ε , mais cela est très particulier à cet exemple. Dans les applications de la partie 7, nous verrons que, bien souvent, les termes de la partie lente d'un DAC sont effectivement nuls sauf pour les puissances qui sont des multiples de p , mais que les termes de la partie rapide n'ont pas de raison *a priori* de s'annuler.

2.2 Extensions.

2.2.1. Avant de présenter le deuxième exemple, nous voudrions explorer des généralisations et extensions du premier exemple. La première généralisation concerne la nature purement locale du résultat. Tout d'abord, toute autre solution de (2.1), de condition initiale $y(x_0, \varepsilon)$ bornée (pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$) en un point fixé $x_0 < 0$, admet un DAC sur $[x_0 + \delta, 0]$ pour tout $\delta \in]0, |x_0|[$; de plus ce DAC est le même que celui de y^- puisque les deux solutions sont exponentiellement proches l'une de l'autre sur $[x_0 + \delta, 0]$. Pour les mêmes raisons, le résultat reste valide avec une hypothèse seulement locale sur g : si g est de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle $] -r, r[$, alors pour tout $x_0 \in] -r, 0[$, tout $\delta \in]0, |x_0|[$ et toute fonction $c = c(\varepsilon)$ bornée sur $]0, \varepsilon_0[$, la solution de (2.1) de condition initiale $y(x_0, \varepsilon) = c(\varepsilon)$ admet un DAC de la forme (2.7) sur $[x_0 + \delta, 0]$; il en est de même pour les solutions à droite, i.e. avec $x_0 \in]0, r[$. Ces DAC ne dépendent pas des conditions initiales ; ils sont *a priori* différents

à gauche et à droite mais ils ont la même partie lente $\sum_{n \geq 0} a_n(x) \eta^n$ avec $a_n(x)$ données par (2.8).

2.2.2. La deuxième généralisation est de remplacer le terme $2x$ dans (2.1) par $p x^{p-1}$, où p est un entier pair¹. Nous avons toujours une unique solution y^- bornée sur \mathbb{R}^- et une unique solution y^+ bornée sur \mathbb{R}^+ . Elles sont données à présent par $y^\pm(x, \varepsilon) = e^{x^p/\varepsilon} \int_{\pm\infty}^x e^{-t^p/\varepsilon} g(t) dt$. La condition $y^- = y^+$ est toujours équivalente à g impaire. La recherche d'une solution formelle $\hat{y} = \sum_{n \geq 0} y_n(x) \varepsilon^n$ aboutit à

$$y_0(x) = 0, \quad y_1(x) = -\frac{1}{p x^{p-1}} g(x), \quad \text{puis} \quad y_{n+1}(x) = \frac{1}{p x^{p-1}} y'_n(x).$$

En général cette solution formelle n'est pas définie en $x = 0$, même lorsque g est impaire. Dans le cas où g est impaire, le développement de y^- est valide aussi bien pour les x positifs que pour les x négatifs, mais ne peut pas être valide au voisinage de 0. Cependant la même méthode d'intégrations par parties successives permet de montrer (que g soit impaire ou non) que y^- possède un DAC, mêlant à la fois des fonctions de x et des fonctions de la variable rapide $X = \frac{x}{\eta}$, avec $\eta = \varepsilon^{1/p}$. Les calculs sont plus longs et compliqués sans être plus difficiles ; ils font apparaître les $p-1$ « fonctions spéciales » suivantes

$$U_k^-(X) = e^{X^p} \int_{-\infty}^X e^{-T^p} T^{k-1} dT, \quad k = 1, \dots, p-1.$$

On obtient finalement un DAC pour y^- de la forme $\sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$ avec $\eta = \varepsilon^{1/p}$ et de g_n de la forme $g_n = c_{n1} U_1^- + \dots + c_{n,p-1} U_{p-1}^-$. De même que précédemment pour U^- , ces fonctions U_{kp}^- ont aussi un développement asymptotique lorsque X tend vers $-\infty$.

2.2.3. Une troisième extension concerne les équations où la fonction g dépend de ε . Si g a un développement asymptotique en puissances de ε , ainsi que toutes ses dérivées par rapport à x , alors on peut montrer que les fonctions y^\pm ont encore des DAC dont les fonctions g_n^\pm sont proportionnelles à U^\pm ; le facteur est le même pour les deux signes. Précisément ce DAC est donné comme avant par

$$y^\pm(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} A_{N-n,n}(0, \varepsilon) \eta^{2n+1} U^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} B_{N-n,n}(x, \varepsilon) \eta^{2n+2} + \mathcal{O}(\eta^{2N+1}) \quad (2.10)$$

1. Ici la situation qui nous intéresse est avec p pair, mais le cas p impair a aussi son intérêt, c.f. l'équation (7.13) dans la partie 7.2.

où $A_{mn} : (x, \varepsilon) \mapsto \sum_{k=0}^m A_{mnk}(x) \varepsilon^k$ est le jet d'ordre m par rapport à ε de la fonction $(\frac{1}{2}DS)^n g$ et B_{mn} est le jet d'ordre m par rapport à ε de la fonction $S((\frac{1}{2}DS)^n g)$.

La seule modification à apporter est la condition nécessaire et suffisante pour avoir $y^- = y^+$. A la place de g impaire, cette condition devient

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/\varepsilon} g(t, \varepsilon) dt = 0.$$

Lorsque $y^- = y^+$, on obtient à nouveau que la solution bornée sur \mathbb{R} a un développement classique dans le cas $p = 2$ car les facteurs de U^\pm dans (2.10) s'annulent. Par contre lorsque $p \geq 4$, ce n'est plus forcément le cas.

2.2.4. Notre dernière extension est d'avoir $f(x)$ à la place de px^{p-1} , où f est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ vérifiant $xf(x) > 0$ si $x \neq 0$ et $f(x) \sim ax^{p-1}$, $x \rightarrow 0$ avec $a \neq 0$. La solution y^- s'écrit alors $y^-(x, \varepsilon) = e^{F(x)/\varepsilon} \int_{-\infty}^x e^{-F(t)/\varepsilon} g(t) dt$ avec $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, si on ajoute l'hypothèse que $\int_{-\infty}^0 e^{-F(t)/\varepsilon} dt$ converge pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Un difféomorphisme $x = \varphi(\xi)$ permet de se ramener à une équation de la forme

$$\varepsilon \frac{dz}{d\xi} = p \xi^{p-1} z + \varepsilon h(\xi),$$

ce qui permet d'obtenir pour y^- un DAC de la forme

$$\sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{\varphi^{-1}(x)}{\eta}\right) \right) \eta^n.$$

Notre théorie générale des DAC permet de montrer qu'un tel développement peut aussi se transformer en un DAC de la variable $X = \frac{x}{\eta}$, i.e. de la forme $\sum_{n \geq 0} \left(b_n(x) + h_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$, c.f. proposition 3.5 (c). Remarquons que, pour cette extension, on a besoin d'autres fonctions "rapides" que U^- et U^+ .

2.3 Deuxième exemple.

Considérons à présent une équation déjà considérée sous une forme voisine par Claude Lobry dans le chapitre introductif [26]. Il s'agit de l'équation

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = 2xy + \varepsilon g(x) + \varepsilon \alpha, \quad (2.11)$$

où $\varepsilon > 0$ est le petit paramètre, $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre de contrôle, et où la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^∞ , et bornée ainsi que toutes ses dérivées. La question est la suivante.

Existe-t-il des valeurs de α pour lesquelles il existe une solution bornée² sur tout \mathbb{R} ?

La réponse est « oui ». Pour le voir, on procède ainsi : étant donné α arbitraire, il existe toujours l'unique solution bornée sur \mathbb{R}^- , notée y^- et donnée par

$$y^-(x, \varepsilon) = e^{x^2/\varepsilon} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/\varepsilon} (\alpha + g(t)) dt. \quad (2.12)$$

En remplaçant $-\infty$ par $+\infty$, la même formule fournit aussi une unique solution y^+ bornée sur \mathbb{R}^+ . On en déduit qu'il existe une solution y bornée sur tout \mathbb{R} si et seulement si $y^+ = y^-$, ce qui donne une équation pour le paramètre α , dont la solution est

$$\alpha(\varepsilon) = - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/\varepsilon} g(t) dt \right) / \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/\varepsilon} dt \right). \quad (2.13)$$

Comme nous avons supposé g de classe \mathcal{C}^∞ , on en déduit que α admet un développement asymptotique quand ε tend vers 0. Pour l'étude des solutions y^\pm correspondant à cette valeur de α , on est dans la situation de la deuxième extension (avec pour fonction g la fonction $(x, \varepsilon) \mapsto g(x) + \alpha(\varepsilon)$) et on a $y^- = y^+$ par le choix de α . La solution y admet donc aussi un développement asymptotique, dont les coefficients sont des fonctions \mathcal{C}^∞ , y compris en $x = 0$.

On calcule directement les premiers termes

$$y_0(x) = 0, \quad \alpha_0 = -g(0), \quad y_1(x) = -\frac{1}{2x} (g(x) + \alpha_0). \quad (2.14)$$

Pour la suite, il suffit de remarquer que les α_n et les $y_n(x)$ sont déterminées uniquement par le fait que y_n n'a pas de pôle en $x = 0$. On les calcule donc récursivement par

$$y_{n+1}(x) = \frac{1}{2x} (y'_n(x) - \alpha_n), \quad \alpha_n = y'_n(0). \quad (2.15)$$

Dans le champ complexe, supposons par exemple g analytique et vérifiant $|g(x)| \leq M e^{M|x|^2}$ dans une bande horizontale

$$S = \{x \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Im} x| < d\}$$

pour un certain $d > 0$. L'équation (2.11) a un relief constitué des courbes de niveau de la fonction $R : x \mapsto \operatorname{Re}(x^2)$. On peut montrer que, pour toute valeur de $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ bornée et pour tout $\delta \in]0, d[$ fixé, la solution y^+ est bornée dans le domaine

$$D_\delta^+ = \{x \in S ; |\arg x| < \frac{3\pi}{4} - \delta, |x| > \delta\},$$

2. Rappelons que "bornée" signifie uniformément par rapport à ε dans un intervalle $]0, \varepsilon_0]$. Dans le présent contexte, il se trouve que, pour tout ε fixé, il existe une unique valeur $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ pour laquelle l'équation (2.11) a une solution $y = y(x, \varepsilon)$ bornée sur \mathbb{R} au sens classique, et que la fonction y ainsi définie est aussi bornée sur $\mathbb{R} \times]0, \varepsilon_0]$.

qui comprend la majeure partie de la montagne à l'est et des deux vallées au nord et au sud dans la bande S , c.f. figure 2.3. Si de plus α admet

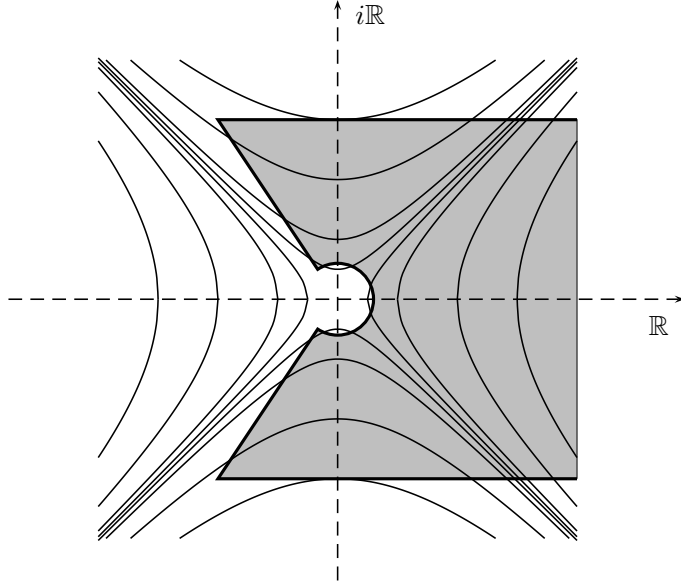


FIGURE 2.3 – Les courbes de niveau $\operatorname{Re}(x^2) = \text{constante}$; en gris le domaine D_δ^+ .

un développement asymptotique en puissances de ε , alors y^+ aussi a un développement asymptotique $y^+(x, \varepsilon) \sim \sum_{n \geq 0} y_n^+(x) \varepsilon^n$. Précisément, pour tout $\delta > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $M = M(\delta, N) > 0$ tel que

$$\left| y^+(x, \varepsilon) - \sum_{n=0}^{N-1} y_n^+(x) \varepsilon^n \right| \leq M \varepsilon^N \quad (2.16)$$

pour tout $x \in D_\delta^+$. Il en est de même pour y^- dans $D_\delta^- = \{x \in S ; |\arg x - \pi| < \frac{3\pi}{2} - \delta, |x| > \delta\}$.

Dans le cas où α est donné par (2.13), c'est-à-dire lorsque $y^+ = y^-$, ces deux développements coïncident : en effet, par unicité du développement asymptotique, on a $y_n^+ = y_n^-$ sur $D_\delta^- \cap D_\delta^+$, donc sur $D_\delta^- \cup D_\delta^+ = S \setminus D'(0, \delta)$ par unicité du prolongement analytique, où $D'(0, \delta)$ est le disque fermé de centre 0 et de rayon δ .

Ce développement est donné par (2.14) et (2.15).

Puisque y^+ est analytique dans tout S et que (2.16) est satisfait pour $x \in S \setminus D(0, \delta)$, par le principe du maximum l'inégalité est satisfaite pour tout x dans S . En résumé, du fait que le point tournant $x = 0$ est simple, le relief ne présente que deux montagnes, si bien qu'une solution définie et

bornée sur des parties de ces deux montagnes est automatiquement bornée sur tout un voisinage du point tournant. On dit d'une telle solution qu'elle est *surstable*, suivant la terminologie adoptée par Guy Wallet [40].

2.4 Troisième exemple.

Remplaçons le terme $2x$ par $4x^3$; autrement dit, considérons l'équation

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = 4x^3 y + \varepsilon g(x) + \varepsilon \alpha, \quad (2.17)$$

Pour tout $a = a(\varepsilon)$, il existe encore une unique solution y^+ bornée sur \mathbb{R}^+ et une unique solution y^- bornée sur \mathbb{R}^- . Il existe aussi une unique valeur de α pour laquelle ces deux solutions coïncident pour donner une solution y bornée sur \mathbb{R} . Cette solution est donnée par

$$y(x, \varepsilon) = e^{x^4/\varepsilon} \int_{-\infty}^x e^{-t^4/\varepsilon} (\alpha + g(t)) dt \quad (2.18)$$

avec $\alpha = \alpha(\varepsilon) = -\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^4/\varepsilon} g(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^4/\varepsilon} dt}.$

À nouveau on peut montrer que $\alpha(\varepsilon)$ admet un développement asymp-

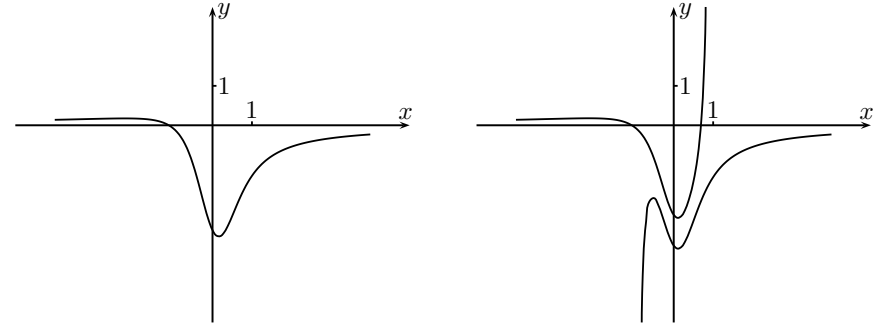


FIGURE 2.4 – Les solutions y^+ et y^- pour $g(x) = 3x^2 + 3x$. À gauche pour $\alpha = -0.507$, à droite pour $\alpha = -0.35$. Ici $|x| \leq 5$, $-5 \leq y \leq 3$ et $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

totique de la forme $\alpha(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varepsilon^{n/2}$. En revanche, la solution y n'a en

général pas de développement asymptotique en puissances de $\varepsilon^{1/2}$ dans un voisinage réel de 0. En effet, un tel développement serait une solution formelle $\hat{y} = \sum_{n \geq 0} y_n(x) \varepsilon^{n/2}$, $\hat{a} = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \varepsilon^{n/2}$ devant vérifier $y_0(x) = 0$, $y_2(x) = -\frac{1}{4x^3} (g(x) + \alpha_0)$ et $y_{2n+2}(x) = \frac{1}{4x^3} (y'_{2n}(x) - \alpha_{2n})$. Dès qu'un coefficient y_{2n} a une dérivée dont le développement de Taylor contient un terme

non nul en x ou x^2 , le coefficient suivant présente un pôle en $x = 0$, quelque soit le choix de α_{2n} .

Nous allons voir qu'il est cependant possible de donner une approximation de y valide dans tout un voisinage réel de 0, à l'aide de fonctions de $\frac{x}{\eta}$, où $\eta = \varepsilon^{1/4}$. Cette idée était à la base de la thèse de Th. Forget [16].

En effet, isolons les premiers termes du développement de g en écrivant $g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + 4x^3h(x)$. La première formule de (2.18) devient

$$y(x, \varepsilon) = (\alpha(\varepsilon) + g_0)U_0^-\left(\frac{x}{\eta}\right) + \eta g_1 U_1^-\left(\frac{x}{\eta}\right) + \eta^2 g_2 U_2^-\left(\frac{x}{\eta}\right) + e^{x^4/\varepsilon} \int_{-\infty}^x e^{-t^4/\varepsilon} 4t^3 h(t) dt \quad (2.19)$$

où on a posé

$$U_j^-(X) = -e^{X^4} \int_{-\infty}^X e^{-T^4} T^j dT.$$

Une intégration par parties donne

$$e^{x^4/\varepsilon} \int_{-\infty}^x e^{-t^4/\varepsilon} 4t^3 h(t) dt = \varepsilon h(x) - \varepsilon e^{x^4/\varepsilon} \int_{-\infty}^x e^{-t^4/\varepsilon} h'(t) dt$$

qui est de la même forme que dans la formule (2.19), ce qui permet de réitérer. De la même manière que dans 2.2.2, on obtient à la fin un DAC. Le fait que y^+ soit égal à y^- entraîne qu'il s'agit d'un DAC sur *tout l'axe réel*. Précisément, il existe des fonctions $a_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ et des combinaisons linéaires g_n des fonctions U_0^-, U_1^-, U_2^- telles que $y^\pm(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right)\right) + \mathcal{O}(\eta^N)$ uniformément sur \mathbb{R} .

Dans le champ complexe, le relief associé à (2.17), qui est donné par la partie réelle de x^4 , comprend quatre montagnes. La solution étudiée est proche de la courbe lente sur deux montagnes, à l'est et à l'ouest, mais *a priori* pas sur les deux autres montagnes nord et sud; elle n'est donc pas surstable.

2.5 Quatrième exemple.

Remplaçons le terme $2x$ par $-2x$ dans le premier exemple (2.1), i.e. considérons

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = -2xy + \varepsilon g(x) \quad (2.20)$$

avec $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et bornée ainsi que toutes ses dérivées. Contrairement à (2.1), la courbe lente $y = 0$ est d'abord répulsive pour $x < 0$, puis attractive pour $x > 0$.

Fixons une valeur initiale $c = c(\varepsilon)$, bornée quand $0 < \varepsilon \rightarrow 0$. La solution de condition initiale $y(0, c(\varepsilon), \varepsilon) = c(\varepsilon)$ est alors bornée sur tout \mathbb{R} quand

$\varepsilon \rightarrow 0$. Elle est donnée par la formule

$$y(x, c(\varepsilon), \varepsilon) = e^{-x^2/\varepsilon} \int_0^x e^{t^2/\varepsilon} g(t) dt + c(\varepsilon) e^{-x^2/\varepsilon}. \quad (2.21)$$

Par une succession d'intégrations par parties, on montre comme dans la partie 2.1 que $y(x, c(\varepsilon), \varepsilon)$ admet un développement asymptotique $\sum_{n \geq 1} y_n(x) \varepsilon^n$ pour x loin de 0. Précisément, pour tout $\delta > 0$, on a

$$y(x, c(\varepsilon), \varepsilon) \sim \sum_{n \geq 1} y_n(x) \varepsilon^n$$

quand $0 < \varepsilon \rightarrow 0$, uniformément sur $] -\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty[$. Les coefficients $y_n(x)$ sont déterminés de manière analogue à (2.3) et (2.4) par $y_1(x) = \frac{1}{2x}g(x)$ et $y_{n+1}(x) = -\frac{1}{2x}y_n'(x)$. Ce développement est indépendant de la condition initiale $c(\varepsilon)$; le terme exponentiel dans (2.21) ne contribue pas en dehors de voisinages de 0.

Comme dans les parties précédentes, il se pose la question du comportement de ces solutions au voisinage de $x = 0$. On procède de nouveau par intégration par parties en utilisant $g(x) = g(0) + x Sg(x)$; on obtient

$$y(x, c(\varepsilon), \varepsilon) = g(0)\eta U(X) + \frac{\varepsilon}{2} Sg(x) + (c(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} Sg(0)) e^{-x^2/\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} e^{-x^2/\varepsilon} \int_0^x e^{t^2/\varepsilon} (Sg)'(t) dt$$

avec $\eta = \sqrt{\varepsilon}$ et $U(X) = \int_0^X e^{-X^2+T^2} dT$. En répétant plusieurs fois l'intégration par parties, on obtient comme dans la partie 2.1

$$y^-(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\left(-\frac{1}{2} DS \right)^n g \right)(0) \eta^{2n+1} U\left(\frac{x}{\eta}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} S \left(\left(-\frac{1}{2} DS \right)^n g \right)(x) \eta^{2n+2} + \left(c(\varepsilon) - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} S \left(\left(-\frac{1}{2} DS \right)^n g \right)(0) \eta^{2n+2} \right) e^{-x^2/\varepsilon} + \mathcal{O}(\eta^{2N+1}). \quad (2.22)$$

Supposons maintenant que $c(\varepsilon)$ admette un développement asymptotique en puissances de η : $c(\varepsilon) \sim \sum_{n \geq 0} c_n \eta^n$. Alors on obtient à nouveau un développement combiné

$$y(x, c(\varepsilon), \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$$

avec pour $n = 0, 1, 2, \dots$

$$a_0 = 0, \quad a_{2n+2} = \frac{1}{2} S \left(-\frac{1}{2} DS \right)^n g, \quad a_{2n+1} = 0$$

ainsi que

$$g_0(X) = c_0 e^{-X^2} \text{ et pour } n \geq 1 \quad g_{2n}(X) = d_n e^{-X^2}$$

avec

$$d_n = c_{2n} - \frac{1}{2} S \left(\left(-\frac{1}{2} DS \right)^{n-1} g \right) (0)$$

et pour $n \geq 0$

$$g_{2n+1}(X) = b_n U(X) + c_{2n+1} e^{-X^2} \text{ avec } b_n = \left(\left(-\frac{1}{2} DS \right)^n g \right) (0).$$

Contrairement à la partie 2.1, ce développement dépend de la condition initiale, mais il est le même pour x positif ou négatif. On peut généraliser et étendre cet exemple, mais cette exploration, analogue à la partie 2.2, est laissée au lecteur.

2.6 Les développements combinés.

Si l'on veut généraliser la méthode de la partie précédente à des équations non linéaires, cela nécessite d'élargir la famille de fonctions dans lesquelles s'écrivent les solutions. En particulier, il est nécessaire de prendre en compte les produits de fonctions $U_j^\pm U_k^\pm$, les solutions d'équations différentielles $\varepsilon y' = px^{p-1}y + U^\pm(\frac{x}{\eta})$, ainsi que des produits de fonctions de x et de fonctions de $\frac{x}{\eta}$. Une stratégie est de construire une algèbre contenant les fonctions $x \mapsto x^n$ et $(x, \varepsilon) \mapsto U_j^\pm(\frac{x}{\eta})$ et stable par les opérateurs \mathcal{J}^\pm suivants. Pour chaque signe $+$ et $-$, \mathcal{J}^\pm associe, à une fonction v à croissance polynomiale (i.e. vérifiant $\exists N \in \mathbb{N}, C > 0 \forall x \in \mathbb{R}, |v(x)| \leq C|x|^N$), l'unique solution à croissance polynomiale sur \mathbb{R}^\pm de l'équation $\frac{dU}{dX} = 4X^3U + v(X)$ i.e. \mathcal{J}^\pm est donné par

$$\mathcal{J}^\pm v(X) = e^{X^4} \int_{\pm\infty}^X e^{-T^4} v(T) dT.$$

La construction de la plus petite algèbre avec ces propriétés conduit à définir un grand nombre de "fonctions spéciales" ; ceci était la stratégie adoptée par Th. Forget dans sa thèse pour l'approximation de solutions canard comme dans 2.4. Une complication additionnelle provient du caractère non unique de l'écriture. Par exemple, le terme x peut être considéré aussi bien comme un terme fonction de x d'ordre 0 en η qu'un terme fonction de $\frac{x}{\eta}$ d'ordre 1 en η , s'il est écrit $\frac{x}{\eta}$.

La stratégie que nous avons adoptée est de considérer d'emblée une algèbre plus grosse. Un avantage de cette stratégie est la simplicité ; un inconvénient est de donner moins de renseignements sur les coefficients.

3 Développements asymptotiques combinés : étude générale.

Nous présentons dans cette partie la théorie générale des DAC : leur définition et leur comportement vis-à-vis des opérations élémentaires d'addition, multiplication, division, dérivation, intégration, composition et prolongement. Dans la section 3.4, nous faisons aussi le lien entre nos DAC et les développements intérieurs et extérieurs de la classique méthode de matching. Ces derniers sont par ailleurs un bon procédé pour déterminer les coefficients d'un développement combiné en pratique, à condition d'avoir pu montrer par ailleurs l'existence de ce développement.

Beaucoup des problèmes résolus par l'utilisation des DAC ont leur origine dans un cadre réel, si bien qu'une présentation purement réelle semble suffire. Cependant un élément essentiel dans la résolution de ces problèmes est l'aspect Gevrey de ces DAC, qui sera développé dans la partie 4. Pour obtenir ces propriétés Gevrey, plusieurs méthodes sont possibles, certaines dans le cadre réel, mais à nos yeux la méthode la plus efficace est d'appliquer notre "théorème-clé" de type Ramis-Sibuya 5.1, pour lequel le cadre complexe est indispensable. C'est pourquoi la présentation faite ici est exclusivement complexe ; on trouvera dans [22] une présentation très voisine dans le cadre réel.

3.1 Notations.

Le disque ouvert de centre 0 et de rayon r est noté $D(0, r)$ et le disque fermé $D'(0, r)$. On note $\text{cl}(E)$ l'adhérence d'une partie E de \mathbb{C} . Étant donnés $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ et $0 < r \leq \infty$, $S(\alpha, \beta, r)$ est le secteur

$$S(\alpha, \beta, r) = \{x \in \mathbb{C} ; 0 < |x| < r, \alpha < \arg x < \beta\}.$$

Il est d'usage de considérer un secteur comme une partie de la surface de Riemann du logarithme $\widetilde{\mathbb{C}^*}$. Cependant, puisque nos secteurs auront toujours une ouverture inférieure à 2π , nous les considérerons comme des sous-ensembles de \mathbb{C}^* . Étant donné un secteur $S = S(\alpha, \beta, r)$ et $\mu > 0$, on note $V(\alpha, \beta, r, \mu)$ l'union du secteur S et du disque $D(0, r)$:

$$V(\alpha, \beta, r, \mu) = \{x \in \mathbb{C} ; (|x| < r \text{ et } \alpha < \arg z < \beta) \text{ ou bien } |x| < \mu\}. \quad (3.1)$$

Nous serons aussi amenés à définir des DAC dans des secteurs privés d'un disque fermé, i.e. des arcs de couronnes. On définit donc, pour $\mu < 0$

$$V(\alpha, \beta, r, \mu) = \{x \in \mathbb{C} ; -\mu < |x| < r \text{ et } \alpha < \arg x < \beta\}. \quad (3.2)$$

Pour faire court, nous appellerons *quasi-secteurs* ces ensembles, que μ soit positif ou négatif. Souvent pour simplifier, nous ne considérerons que le cas $\mu > 0$; les modifications à apporter dans le cas $\mu < 0$ sont mineures et seront indiquées au fur et à mesure.

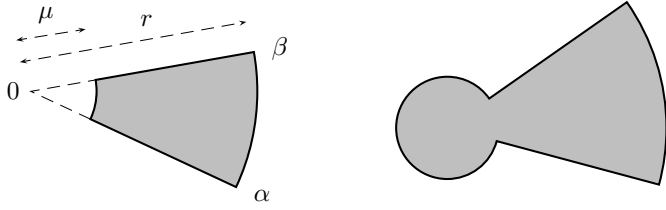


FIGURE 3.1 – Deux exemples de quasi-secteurs, à gauche pour $\mu < 0$, à droite pour $\mu > 0$.

Étant donné un quasi-secteur infini $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$, $\mathcal{G}(V)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions g holomorphes bornées dans V et ayant un développement asymptotique au sens de Poincaré à l'infini sans terme constant $g(X) \sim \sum_{\nu \geq 1} g_\nu X^{-\nu}$, $V \ni X \rightarrow \infty$, i.e.

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists C_N > 0 \quad \forall X \in V, \quad \left| g(X) - \sum_{\nu=1}^{N-1} g_\nu X^{-\nu} \right| \leq C_N |X|^{-N}.$$

Soit $\mathbf{T} : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ l'opérateur qui, à une fonction g , associe la fonction $\mathbf{T}g$ donnée par

$$\mathbf{T}g(X) = Xg(X) - g_1 \quad (3.3)$$

où g_1 est le premier terme du développement asymptotique de g à l'infini.

Par abus, la notation $V(0, 2\pi, \infty, -r)$ désigne toute la couronne des $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| > r \geq 0$, et pas cette couronne privée de la demi-droite $]r, +\infty[$. L'espace de Banach $\mathcal{G}(V)$ est alors l'espace des fonctions holomorphes bornées sur V tendant vers 0 quand $X \rightarrow \infty$.

Pour un nombre $r_0 > 0$, on note $\mathcal{H}(r_0)$ l'espace vectoriel des fonctions a holomorphes bornées dans le disque $D(0, r_0)$ centré en 0 et de rayon r_0 . De manière analogue à \mathbf{T} , soit $\mathbf{S} : \mathcal{H}(r_0) \rightarrow \mathcal{H}(r_0)$ l'opérateur qui, à une fonction a , associe la fonction $\mathbf{S}a$ donnée par

$$\mathbf{S}a(x) = \frac{a(x) - a(0)}{x}. \quad (3.4)$$

Sur les développements, les opérateurs \mathbf{S} et \mathbf{T} ont pour action de décaler vers la gauche et d'effacer le premier terme : si $g(X) \sim \sum_{\nu \geq 1} g_\nu X^{-\nu}$, alors

$$\mathbf{T}g(X) \sim \sum_{\nu \geq 1} g_{\nu+1} X^{-\nu} \quad \text{et si} \quad a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \quad \text{alors} \quad \mathbf{S}a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+1} x^\nu.$$

3.2 Séries formelles combinées.

Définition 3.1 . Soit $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ un quasi-secteur infini (avec μ positif ou négatif) et $r_0 > 0$. Une *série formelle combinée* associée à V et à $D(0, r_0)$ est une expression de la forme

$$\widehat{y}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n, \quad (3.5)$$

où $a_n \in \mathcal{H}(r_0)$ et $g_n \in \mathcal{G}(V)$.

Les fonctions a_n forment la *partie lente* de la série formelle combinée, et les g_n la *partie rapide*.

REMARQUES . 1. Une série formelle combinée est précisément un élément de $(\mathcal{H}(r_0) \times \mathcal{G}(V))^{\mathbb{N}}$. De manière analogue à ce qui se fait pour les séries formelles classiques, nous pourrions donc représenter une série formelle combinée sous la forme $\sum_{n \geq 0} (a_n(x) + g_n(X)) \eta^n$ — ou sous la forme $\sum_{n \geq 0} (a_n(x), g_n(X)) \eta^n$ — à l'aide de trois variables. Cependant, nous n'aurons pas à considérer de fonctions de trois variables asymptotiques à une série formelle combinée : dans l'usage que nous en ferons les trois variables seront liées par la relation $x = \eta X$.

2. *A priori*, pour l'unicité du développement, il suffirait de demander aux fonctions g_n de tendre vers 0 à l'infini. Cependant, la formule de multiplication (3.7) montre qu'il est nécessaire que les fonctions de $\frac{x}{\eta}$ aient un développement asymptotique complet à l'infini si l'on veut pouvoir écrire les développements combinés par exemple de produits $x^N g(\frac{x}{\eta})$. Nous demandons aux g_n d'être analytiques dans des quasi-secteurs, et pas simplement des secteurs, car ceci sera nécessaire dans les applications.

On note $\widehat{\mathcal{C}}(r_0, V)$ l'ensemble des séries formelles combinées associées à V et à $D(0, r_0)$ et on le munit de l'addition et de la multiplication scalaire canoniques ainsi que de la distance ultramétrique

$$d(\widehat{y}_1, \widehat{y}_2) = 2^{-\text{val}(\widehat{y}_1 - \widehat{y}_2)}, \quad \text{où} \quad \text{val}(\widehat{y}) = \min\{n \geq 0 ; a_n \text{ ou } g_n \neq 0\} \quad (3.6)$$

et de la topologie induite par cette distance. On note I l'inclusion canonique de $\mathcal{H}(r_0)$ dans $\widehat{\mathcal{C}}(r_0, V)$ et, pour ne pas multiplier les notations, par la même lettre celle de $\mathcal{G}(V)$ dans $\widehat{\mathcal{C}}(r_0, V)$. Le symbole η désigne à la fois le nombre réel, la fonction de (x, η) à valeur η et la série formelle combinée comprenant un seul terme $a_1 = 1$.

L'algèbre "différentielle" $\widehat{\mathcal{C}}(r_0, V)$.

Grâce au fait que les $g_n(X)$ admettent un développement asymptotique quand $X \rightarrow \infty$, les opérateurs \mathbf{S} et \mathbf{T} permettent de munir $\widehat{\mathcal{C}}(r_0, V)$ d'une structure d'algèbre de la manière suivante.

On commence par effectuer le produit de deux séries formelles combinées \hat{y} et \hat{z} en développant le produit terme à terme : si $\hat{y}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$ et $\hat{z}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(b_n(x) + h_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$, alors on pose

$$\hat{y} \cdot \hat{z}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\nu=0}^n \left(I(a_\nu)(x, \eta) + I(g_\nu)(x, \eta) \right) \cdot \left(I(b_{n-\nu})(x, \eta) + I(h_{n-\nu})(x, \eta) \right) \right) \eta^n ;$$

ceci est une série convergente pour la topologie de $\hat{\mathcal{C}}(r_0, V)$ et il reste donc à définir les produits d'images par I . Les ensembles $I(\mathcal{H}(r_0))$ et $I(\mathcal{G}(V))$ étant naturellement munis d'une structure d'algèbre, il nous suffit donc de définir le produit d'un élément $I(a)(x, \eta)$, $a \in \mathcal{H}(r_0)$ par un élément $I(g)(x, \eta)$, $g \in \mathcal{G}(V)$. Pour cela, en notant $a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ et $g(X) \sim \sum_{\nu > 0} g_\nu X^{-\nu}$, on observe que $a(x)g\left(\frac{x}{\eta}\right) = (a_0 + x\mathbf{S}a(x))g\left(\frac{x}{\eta}\right)$ et $xg\left(\frac{x}{\eta}\right) = \left(g_1 + \mathbf{T}g\left(\frac{x}{\eta}\right)\right)\eta$. Autrement dit, un développement asymptotique du produit de fonctions $a(x)g\left(\frac{x}{\eta}\right)$ par rapport à η peut être obtenu par

$$a(x)g\left(\frac{x}{\eta}\right) = a_0 g\left(\frac{x}{\eta}\right) + g_1 \mathbf{S}a(x)\eta + \mathbf{S}a(x) \mathbf{T}g\left(\frac{x}{\eta}\right)\eta. \quad (3.7)$$

En itérant la formule correspondante pour les images par I , on définit ainsi, avec la convention $g_0 = 0$

$$I(a)(x, \eta) I(g)(x, \eta) = \sum_{\nu \geq 0} \left(g_\nu (\mathbf{S}^\nu a)(x) + a_\nu (\mathbf{T}^\nu g)\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^\nu. \quad (3.8)$$

REMARQUES. 1. Les séries combinées classiques [39, 4] entrent dans le cadre des nôtres : il s'agit du cas où les fonctions g_n sont à décroissance exponentielle. Rappelons qu'une fonction $g : J =]\mu, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est à *décroissance exponentielle* s'il existe $C, A > 0$ vérifiant

$$\forall X \in J, |g(X)| \leq C \exp(-AX).$$

Une fonction g à décroissance exponentielle satisfait en particulier $g(X) = \mathcal{O}(X^{-N})$, $X \rightarrow +\infty$ pour tout entier N , donc est *plate* : elle admet la série nulle pour développement asymptotique.

2. Dans le cas des séries combinées classiques, la partie lente d'un produit ne dépend que des parties lentes des facteurs. Ceci peut se voir par exemple grâce à (3.8) : lorsque tous les g_ν sont nuls, le produit d'un terme lent et d'un terme rapide n'engendre que des termes rapides ; c.f. aussi la remarque

(2), page 11 de [4]. En revanche, dans le cas des séries combinées du présent article, la formule (3.8) montre que le produit d'un terme lent avec un terme rapide fait aussi apparaître des termes lents, si bien que tout est imbriqué.

Les séries combinées sont aussi compatibles avec la composition à gauche.

Lemme 3.2 . Soit $\hat{y} \in \eta \hat{\mathcal{C}}(r_0, V)$ une série formelle combinée sans terme constant, i.e. avec $a_0(x) \equiv 0$ et $g_0(X) \equiv 0$. Soit $\hat{P} \in \hat{\mathcal{C}}(r_0, V)[[y, \eta]]$ une série formelle à deux variables dont les coefficients sont des séries formelles combinées : $\hat{P}(x, y, \eta) = \sum_{j,k \geq 0} p_{j,k}(x, \eta) y^j \eta^k$ avec $p_{j,k} \in \hat{\mathcal{C}}(r_0, V)$. Alors l'expression

$\hat{\mathbf{Q}}(\hat{y})(x, \eta) = \hat{P}(x, \hat{y}(x, \eta), \eta) := \sum_{j,k \geq 0} p_{j,k}(x, \eta) \hat{y}(x, \eta)^j \eta^k$ définit une

série formelle combinée. De plus, l'application $\hat{\mathbf{Q}} : \eta \hat{\mathcal{C}}(r_0, V) \rightarrow \hat{\mathcal{C}}(r_0, V)$ ainsi définie est 1-lipschitzienne.

La preuve est immédiate, grâce à la convergence de la série définissant $\hat{\mathbf{Q}}(\hat{y})(x, \eta)$.

Nous voulons à présent définir la dérivée d'une série formelle combinée. Du fait que les dérivées de fonctions de $\mathcal{H}(r_0)$ ne sont plus nécessairement bornées et que celles de fonctions de $\mathcal{G}(V)$ n'ont plus nécessairement un développement asymptotique, cette dérivation est un peu plus délicate à traiter, bien que la formule soit simple. En particulier, cela nécessite de réduire un peu les domaines de définition des fonctions. Dans le cadre réel, il n'est pas toujours possible de définir la dérivée d'une série formelle combinée.

Définition 3.3 . Si $\hat{y} \in \hat{\mathcal{C}}(r_0, V(\alpha, \beta, \infty, \mu))$ est une série formelle combinée donnée par

$$\hat{y}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n,$$

telle que le premier terme rapide g_0 est identiquement nul, alors sa dérivée par rapport à x , $\frac{d\hat{y}}{dx}$, est donnée par

$$\frac{d\hat{y}}{dx}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(a'_n(x) + g'_{n+1}\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n ;$$

Ceci définit un élément de $\hat{\mathcal{C}}(\tilde{r}_0, V(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \infty, \tilde{\mu}))$ pour tout $\tilde{r}_0 \in]0, r_0[$, $\alpha < \tilde{\alpha} < \tilde{\beta} < \beta$ et tout $\tilde{\mu} < \mu$.

REMARQUE. La dérivée d'une série formelle combinée n'est définie *a priori* que si le premier terme rapide g_0 est identiquement nul. En revanche, l'opérateur $\eta \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}(\eta \cdot)$ est défini sans condition sur g_0 .

3.3 Développements combinés.

Jusqu'à présent, les objets que nous avons considérés étaient des expressions formelles. Nous voulons maintenant définir le développement combiné d'une fonction de deux variables x et η . Le plus simple et le plus naturel serait de considérer des fonctions définies sur un produit de secteurs en x et en η . Cependant, pour certaines applications, il sera commode que le domaine par rapport à x contienne un voisinage de 0 de taille proportionnelle à $|\eta|$. Pour d'autres applications, au contraire, il nous sera nécessaire d'ôter un voisinage de 0. C'est la raison pour laquelle nous avons introduit les quasi-secteurs (3.1) et (3.2).

Définition 3.4 . Soit $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ un quasi-secteur infini, soit $S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ un secteur fini et soit $\alpha_1 < \beta_1$ tels que $\alpha \leq \alpha_1 - \beta_2 < \beta_1 - \alpha_2 \leq \beta$. Soit $y(x, \eta)$ une fonction holomorphe définie pour $\eta \in S_2$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$. Enfin, soit $\hat{y}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \in \hat{\mathcal{C}}(r_0, V)$.

Nous disons que y admet \hat{y} comme DAC et nous écrivons $y(x, \eta) \sim \hat{y}(x, \eta)$, $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$, $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$, si, pour tout entier N , il existe une constante K_N telle que, pour tout $\eta \in S_2$ et tout $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$

$$\left| y(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \right| \leq K_N |\eta|^N. \quad (3.9)$$

Ici encore, les fonctions a_n forment la *partie lente* du DAC et les g_n la *partie rapide*. Les conditions sur les angles α_j, β_j assurent l'implication : si $\eta \in S_2$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$ alors $x/\eta \in V$.

REMARQUES . 1. Dans le cas d'une couronne $V = V(0, 2\pi, \infty, -r)$, $r > 0$, il n'y a pas besoin de conditions sur les angles. Un développement combiné $y(x, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} (a_n(x) + g_n(\frac{x}{\eta})) \eta^n$ est alors une autre forme d'un développement monomial introduit par [7]. Quand on pose $u = \eta/x$, alors $\eta = xu$ et la fonction $z(x, u) = y(x, xu)$ est définie sur un secteur en xu défini dans [7] après la définition 3.4, i.e. l'ensemble des (x, u) tels que $|x| < r_0, |u| < \min(\frac{1}{r}, \frac{r_0}{r_0})$ et $\arg(xu) \in]\alpha_1, \beta_1[$, et y admet le développement $z(x, u) \sim \sum_{n \geq 0} (a_n(x) + b_n(u))(xu)^n$ défini dans [7], définition 3.6, avec $b_n(u) = g_n(1/u)$.

2. Dans un but de simplicité, nous demandons aux fonctions a_n d'être holomorphes dans tout le disque $D(0, r_0)$, alors que la fonction y elle-même n'est définie que pour $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$. Dans la partie 3.4 nous serons amenés à généraliser la définition de DAC au cas où les fonctions a_n sont holomorphes dans un domaine contenant 0, c.f. la remarque après la proposition 3.13.

3. Une fonction $y(x, \eta)$ ne peut pas avoir deux DAC différents quand $S_2 \ni$

$\eta \rightarrow 0$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$. En effet, on a $\lim_{\eta \rightarrow 0} y(x, \eta) = a_0(x)$ pour $x \in S(\alpha_1, \beta_1, r_0)$ donc la fonction holomorphe $a_0 \in \mathcal{H}(r_0)$ est déterminée de manière unique, donc aussi $a_0(0)$. On continue avec $\lim_{\eta \rightarrow 0} y(\eta X, \eta) = a_0(0) + g_0(X)$, et ainsi de suite. Il convient de noter que, pour démontrer cette unicité, seule la propriété que les $g_n(X)$ tendent vers 0 quand $X \rightarrow \infty$ a été utilisée ; ceci sera utile dans la partie 5.1.

Il est immédiat que les DAC sont compatibles avec l'addition et la multiplication scalaire. Pour la compatibilité avec la multiplication entre développements, le seul point moins évident est de montrer qu'un produit $a(x)g(\frac{x}{\eta})$, $a \in \mathcal{H}(r_0)$, $g \in \mathcal{G}(V)$ admet un DAC. Ceci est une conséquence de la formule (3.7) et du fait que **S** et **T** sont des endomorphismes. La définition (3.8) était faite pour que l'on ait $a(x)g(\frac{x}{\eta}) \sim I(a)(x, \eta)I(g)(x, \eta)$.

Composition .

Les DAC sont aussi compatibles avec la composition à gauche et à droite par une fonction holomorphe, comme l'exprime la proposition suivante. L'énoncé (a) concerne la composition à gauche par une fonction de trois variables, mais dans le cas d'un DAC sans terme en η^0 . L'énoncé (b) traite le cas de la composition à gauche sans cette restriction, mais par une fonction d'une variable uniquement. Ces deux énoncés sont donc complémentaires. Pour la composition à droite, nous n'avons considéré que les fonctions de la seule variable x pour une raison de simplicité, mais il est possible de généraliser le résultat au cas d'une fonction φ des deux variables x et η , telle que $\varphi(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = 1$. La version Gevrey de cette généralisation est faite dans la partie 5.6, théorème 5.7. Nous n'avons pas mis au point d'énoncé à propos d'un changement de variable portant sur η car nous n'en avons pas l'utilité.

Proposition 3.5 .

(a) Soit $P(x, z, \eta)$ une fonction holomorphe définie quand $|z| < r$, $\eta \in S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$ telle que tous les coefficients P_n du développement $P(x, z, \eta) = \sum_{n \geq 0} P_n(x, \eta)z^n$ admettent un DAC $P_n(x, \eta) \sim \hat{P}_n(x, \eta)$ quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$, $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$. Soit $y(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta)$ une fonction admettant un DAC $\hat{y}(x, \eta)$ quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$ sans termes en η^0 . On suppose que $\sup_{x, \eta} |y(x, \eta)| < r$. Alors la fonction $u : (x, \eta) \mapsto P(x, y(x, \eta), \eta)$ admet le DAC

$$\hat{\mathcal{Q}}(\hat{y})(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \hat{P}_n(x, \eta) \hat{y}(x, \eta)^n.$$

(b) On considère une fonction holomorphe y définie pour $\eta \in S_2$ et $x \in V = V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$, à valeurs dans un ensemble $W \subset \mathbb{C}$ et admettant un

DAC quand $\eta \rightarrow 0$. Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de l'adhérence de W . Alors la fonction $z = f \circ y$ admet un DAC quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$, $x \in V$.

- (c) Soit φ une fonction holomorphe définie quand $|x| < x_1$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$ et soit $z = z(u, \eta)$ une fonction ayant un DAC $\sum_{n \geq 0} \left(a_n(u) + g_n\left(\frac{u}{\eta}\right) \right) \eta^n$ quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$ et $u \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$, avec $a_n \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $g_n \in \mathcal{G}$. Alors pour tout $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1$ avec $\alpha_1 < \tilde{\alpha}_1 < \tilde{\beta}_1 < \beta_1$ et tout $\tilde{\mu} < \mu$ il existe $\tilde{r}, \tilde{\eta}_0 > 0$ tels que la fonction $y : (x, \eta) \mapsto z(\varphi(x), \eta)$ admet un DAC quand $S(\alpha_2, \beta_2, \tilde{\eta}_0) \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{r}, \tilde{\mu}|\eta|)$.

REMARQUE. Dans le (a), l'hypothèse “ y bornée par r ” n'est pas essentielle : il suffit de réduire le domaine de u si elle n'est pas satisfaite.

Preuve. (a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la somme finie $\sum_{0 \leq n \leq N-1} P_n(x, \eta) y(x, \eta)^n$ admet un DAC (compatibilité avec produit et somme). Il reste à vérifier qu'il existe une constante L telle que le reste est borné par $L|\eta|^N$. Ceci est évident d'après les hypothèses.

(b) Quitte à modifier f et y , on peut supposer que $a_0(0) = 0$. Moyennant un développement de Taylor, il suffit de montrer que $f(a_0(x) + g_0(\frac{x}{\eta}))$ admet un DAC.

Notons $h(u, v) = f(u + v)$. Il suffit donc de montrer que $h(a_0(x), g_0(\frac{x}{\eta}))$ admet un DAC quand η tend vers 0. Pour montrer ceci, on remarque qu'on peut écrire

$$h(x, y) = h(x, 0) + h(0, y) - h(0, 0) + xyk(x, y)$$

avec une certaine fonction holomorphe k des deux variables x, y . On a donc

$$\begin{aligned} h(a_0(x), g_0(\frac{x}{\eta})) &= h(a_0(x), 0) + h(0, g_0(\frac{x}{\eta})) - h(0, 0) \\ &\quad + a_0(x)g_0(\frac{x}{\eta})k(a_0(x), g_0(\frac{x}{\eta})). \end{aligned}$$

Puisque $a_0(0) = 0$, le produit $a_0(x)g_0(\frac{x}{\eta})$ est de la forme $\mathcal{O}(\eta)$; on obtient donc un DAC pour $h(a_0(x), g_0(\frac{x}{\eta}))$ en itérant cette procédure.

En passant, remarquons que le terme principal du DAC de $f(y(x, \eta))$ (sans la réduction à $a_0(0) = 0$) a pour partie lente $f(a_0(x))$ et pour partie rapide $f(a_0(0) + g_0(\frac{x}{\eta})) - f(a_0(0))$.

- (c) Si $\tilde{r}, \tilde{\eta}_0$ sont assez petits, alors $\varphi(V(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{r}, \tilde{\mu}|\eta|)) \subset V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$ si $\eta \in S_2, |\eta| < \tilde{\eta}_0$. Il suffit alors de montrer que $b(\frac{\varphi(x)}{\eta})$ admet un DAC, si b est dans \mathcal{G} . Il convient d'introduire les fonctions ψ et h définies par $\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{x} = h(x)$ et $\psi(x, t) = x/(1 + txh(x))$. La fonction h se prolonge en une fonction holomorphe définie quand $|x| < x_1$, notée encore h par abus de notation, et $\psi(x, 0) = x, \psi(x, 1) = \varphi(x)$. Le développement de Taylor de $b(\frac{\varphi(x)}{\eta}) = b(\frac{\psi(x, 1)}{\eta})$ par rapport à t donne pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$b\left(\frac{\varphi(x)}{\eta}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} b\left(\frac{\psi(x, t)}{\eta}\right) \Big|_{t=0} + \frac{1}{(N-1)!} \int_0^1 \frac{\partial^N}{\partial t^N} b\left(\frac{\psi(x, t)}{\eta}\right) \Big|_{t=\tau} (1-\tau)^{n-1} d\tau.$$

En utilisant le fait que $\frac{\partial}{\partial t} [f(\frac{\psi(x, t)}{\eta})] = \eta h(x)(\Delta f)(\frac{\psi(x, t)}{\eta})$ avec l'opérateur Δ défini par $(\Delta f)(X) = -X^2 f'(X)$, on obtient

$$\begin{aligned} b\left(\frac{\varphi(x)}{\eta}\right) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\eta^n}{n!} h(x)^n (\Delta^n b)\left(\frac{x}{\eta}\right) \\ &\quad + \frac{\eta^N}{(N-1)!} h(x)^N \int_0^1 (\Delta^N b)\left(\frac{\psi(x, \tau)}{\eta}\right) (1-\tau)^{n-1} d\tau \end{aligned} \quad (3.10)$$

et on peut vérifier que le dernier terme est $\mathcal{O}(\eta^N)$. La compatibilité des DAC avec l'addition et la multiplication entraîne alors l'existence d'un DAC pour $b(\frac{\varphi(x)}{\eta})$. \square

Dérivation.

Lemme 3.6. Soit $y(x, \eta)$ une fonction définie quand $\eta \in S_2$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$ telle que $y(x, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n =: \widehat{y}(x, \eta) \in \widehat{\mathcal{C}}(r_0, V)$ quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$. On suppose que $g_0(X) \equiv 0$.

Alors, pour tout \tilde{r}_0 entre 0 et r_0 et tout $\tilde{\mu} < \mu$, on a

$$\frac{dy}{dx}(x, \eta) \sim \frac{d\widehat{y}}{dx}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(a'_n(x) + g'_{n+1}\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$$

quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, \tilde{r}_0, \tilde{\mu}|\eta|)$, avec $\frac{d\widehat{y}}{dx}(x, \eta) \in \widehat{\mathcal{C}}(r_0, \tilde{V})$, où $\tilde{V} := V(\alpha, \beta, \infty, \tilde{\mu})$.

Preuve. Notons $\delta = \min(|\eta|(\mu - \tilde{\mu}), r_0 - \tilde{r}_0)$ et, pour $N \in \mathbb{N}$ arbitraire,

$$R_N(x, \eta) = y(x, \eta) - \sum_{n < N} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n. \quad (3.11)$$

La formule de Cauchy pour la dérivée donne

$$\left| \frac{dR_{N+1}}{dx}(x, \eta) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|u-x|=\delta} \frac{R_{N+1}(u, \eta)}{(u-x)^2} du \right| \leq \frac{1}{\delta} \max_{|u-x|=\delta} |R_{N+1}(u, \eta)|,$$

ce qui donne $\frac{dR_{N+1}}{dx}(x, \eta) = \mathcal{O}(|\eta|^N)$. Puisque les fonctions a'_N et g'_{N+1} sont elles-mêmes bornées sur $D(0, \tilde{r}_0)$, resp. sur \tilde{V} , on en déduit $\frac{dR_N}{dx}(x, \eta) = \mathcal{O}(|\eta|^N)$. \square

REMARQUE. Le lemme 3.6 n'est pas valable dans le cadre réel. Par exemple, il est bien connu qu'il existe de petites fonctions avec des dérivées non bornées. Cependant on a le résultat suivant en réel : si la dérivée d'une fonction ayant un DAC admet elle aussi un DAC, alors la formule (3.12) ci-après implique que le DAC de la dérivée peut être obtenu en dérivant terme à terme le DAC de la fonction.

Intégration.

Une difficulté pour la compatibilité avec l'intégration provient du fait que les fonctions de \mathcal{G} ayant un terme avec $1/X$ dans leur développement asymptotique à l'infini ne possèdent pas de primitive dans \mathcal{G} . Lorsque ces termes sont tous nuls, l'intégration ne pose pas de problème, comme l'indique l'énoncé qui suit.

Proposition 3.7 . *Considérons un DAC $y(x, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$ défini pour $\eta \in S_2$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$, tel que toutes les fonctions g_n satisfont $g_n(X) = \mathcal{O}(X^{-2})$ quand $X \rightarrow \infty$.*

Alors la fonction $(x, \eta) \mapsto \int_r^x y(t, \eta) dt$ admet un DAC. Précisément, on a

$$\int_r^x y(t, \eta) dt \sim \widehat{Y}(x, \eta) - \widehat{Y}(r, \eta), \quad (3.12)$$

$$\text{où } \widehat{Y}(x, \eta) = A_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n(x) + G_{n-1}\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$$

$$\text{avec } A_n(x) = \int_r^x a_n(t) dt \text{ et } G_n(X) = - \int_X^{\infty} g_n(T) dT.$$

Ici on a identifié $\widehat{Y}(r, \eta)$ avec la série formelle obtenue en remplaçant $G\left(\frac{x}{\eta}\right)$ par son développement asymptotique quand $\eta \rightarrow 0$. La preuve est immédiate : on a bien $A_n \in \mathcal{A}$ et, d'après l'hypothèse, $G_n \in \mathcal{G}$. Avant d'énoncer le résultat dans le cas général, nous devons encore introduire une notation. Soit ℓ une fonction analytique dans le quasi-secteur $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ telle que sa dérivée ℓ' a un développement asymptotique à l'infini commençant par $\frac{1}{X}$:

$$\ell'(X) \sim \sum_{n \geq 1} c_n X^{-n} \text{ avec } c_1 = 1.$$

On peut choisir par exemple $\ell(X) = \log(X - \gamma)$ avec $\gamma \notin V$. Dans une situation réelle au départ, on pourra prendre $\ell(X) = \frac{1}{2} \log(X^2 + L^2)$ avec L assez grand. Nous serons aussi amenés à considérer une fonction ℓ dépendant des deux variables X et η . Pour simplifier, et parce que cela nous suffira, nous ne considérerons ℓ que sous la forme de la somme d'une fonction ne dépendant que de X et d'une fonction ne dépendant que de η . Dans l'application à la résonance, nous choisirons $\ell(X, \eta) = \frac{1}{p} \log(X^p + 1) + \log(\eta) = \frac{1}{p} \log(x^p + \varepsilon)$. L'énoncé dans le cas général est le suivant.

Proposition 3.8 . *Étant donné un DAC $y(x, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$, notons \widehat{R} la série des résidus des $g_n(X)$: $\widehat{R}(\eta) = \sum_{n \geq 0} g_{n1} \eta^n$.*

Alors on a $\int_r^x y(t, \eta) dt \sim \widehat{Y}(x, \eta) - \widehat{Y}(r, \eta)$, avec

$$\begin{aligned} \widehat{Y}(x, \eta) &= \eta \widehat{R}(\eta) \left(\ell\left(\frac{x}{\eta}\right) - \ell\left(\frac{r}{\eta}\right) \right) + A_0(x) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n(x) + H_{n-1}\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\text{où } A_n(x) = \int_r^x a_n(t) dt \text{ et } H_n(X) = - \int_X^{\infty} (g_n(T) - g_{n1} \ell'(T)) dT.$$

Ici aussi, nous avons identifié $\widehat{Y}(r, \eta)$ avec la série formelle obtenue en remplaçant $H_n\left(\frac{x}{\eta}\right)$ par son développement quand η tend vers 0.

Preuve. Le théorème de Borel-Ritt classique (voir ci-dessous) nous fournit une fonction $R(\eta)$ ayant $\widehat{R}(\eta)$ pour développement asymptotique. La différence $y(x, \eta) - R(\eta) \ell'\left(\frac{x}{\eta}\right)$ satisfait la condition de la proposition 3.7, donc son intégrale admet un DAC. Le "DAC généralisé" pour y s'en déduit. \square

On a aussi un énoncé analogue au théorème classique de Borel-Ritt. Ce théorème affirme, pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes et tout secteur $S(\alpha, \beta, \eta_0)$, l'existence d'une fonction $a = a(\eta)$ définie sur S et admettant la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n$ pour développement asymptotique. Le résultat est aussi vrai lorsque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions analytiques d'une variable complexe x . Dans le cas de nos DAC, l'énoncé est le suivant.

Lemme 3.9 . *(Borel-Ritt) Soit $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ un quasi-secteur infini ($\mu > 0$ ou < 0), $S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ un secteur fini, $r_0 > 0$ et soit $\alpha_1 < \beta_1$ tels que $\alpha \leq \alpha_1 - \beta_2 < \beta_1 - \alpha_2 \leq \beta$. Étant donnée une série formelle combinée $\widehat{y}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \in \widehat{\mathcal{C}}(r_0, V)$, il existe une fonction $y(x, \eta)$ holomorphe définie pour $\eta \in S_2$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$ telle que $y(x, \eta) \sim \widehat{y}(x, \eta)$ quand $\eta \rightarrow 0$.*

Preuve. Il suffit d'utiliser le théorème de Borel-Ritt pour des développements asymptotiques uniformes classiques deux fois : une fois pour $\sum a_n(x) \eta^n$, une fois pour $\sum g_n(X) \eta^n$. \square

3.4 Développements combinés et "matching".

Notre notion de développement combiné mélange la notion classique de développement asymptotique au sens de Poincaré que nous appellerons "extérieur", de la forme $y(x, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} c_n(x) \eta^n$, et celle de développement dit "intérieur" de la forme $y(\eta X, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} h_n(X) \eta^n$. Ces développements intérieurs et extérieurs occupent une place centrale dans la méthode de recollement des développements asymptotiques (méthode des "matched asymptotic

expansions” en anglais). Bien que les DAC soient de nature différente, les liens avec les développements intérieurs et extérieurs sont étroits.

Nous montrons d’une part qu’une fonction ayant un DAC admet aussi un développement intérieur et un développement extérieur, et que ces deux développements ont une région commune de validité. En d’autres termes, une preuve d’existence d’un DAC permet de donner un fondement solide à la méthode de recollement.

D’autre part la réciproque est vraie : si la méthode de recollement est valide, i.e. si une fonction a des développements intérieur et extérieur avec une région commune de validité, et si de plus ces développements vérifient une propriété supplémentaire, alors la fonction a aussi un DAC. Le premier résultat est le suivant.

Proposition 3.10 . Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctions de $\mathcal{H}(r_0)$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctions de $\mathcal{G}(V)$ avec $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$. On note leurs développements $a_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}x^m$ et $g_n(X) \sim \sum_{m>0} g_{nm}X^{-m}$. Supposons que

$$y(x, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$$

quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$ au sens de la définition 3.4.

Alors, pour $x \in S(\alpha_1, \beta_1, r_0)$ fixé, on a

$$y(x, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} c_n(x) \eta^n \quad \text{quand } S_2 \ni \eta \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

où $c_n(x) = a_n(x) + \sum_{0 \leq l \leq n-1} g_{l,n-l}x^{l-n}$. De plus, pour tout $r > 0$, ce développement est uniforme par rapport à x sur l’ensemble des $x \in S(\alpha_1, \beta_1, r_0)$ tels que $|x| > r$.

De même, si $X \in V$ et $\alpha_3, \beta_3, \eta_3$ sont tels que $\eta \in S(\alpha_3, \beta_3, \eta_3)$ implique $\eta \in S_2$ et $\eta X \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$, alors on a

$$y(\eta X, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} h_n(X) \eta^n \quad \text{quand } S(\alpha_3, \beta_3, \eta_3) \ni \eta \rightarrow 0, \quad (3.15)$$

où $h_n(X) = g_n(X) + \sum_{0 \leq l \leq n} a_{n-l,l}X^l$. Ce développement est uniforme par rapport à X sur des parties compactes de V vérifiant la condition précédente.

REMARQUES. 1. Conformément à la littérature, nous appellerons le premier développement (3.14) le *développement extérieur* et le second (3.15) le *développement intérieur*. Chaque fonction c_n du développement extérieur peut avoir une singularité en $x = 0$ mais seulement un pôle d’ordre au plus n ;

de même chaque fonction h_n du développement intérieur a une croissance polynomiale d’ordre au plus n lorsque $X \rightarrow \infty$. Le *restreint index* au sens de Wasow [42], chapitre VIII est donc égal à 1.

2. On peut montrer que, pour tout $\kappa \in]0, 1[$, le développement extérieur (3.14) est uniforme sur $|x| > |\eta|^\kappa$, et que le développement intérieur (3.15) est uniforme sur $|X| < |\eta|^{-\kappa}$, ce qui justifie la méthode de “matched asymptotic expansions” lorsqu’un DAC existe. Dans chacun de ces cas, pour obtenir une approximation à l’ordre N , il convient alors de sommer jusqu’à l’ordre $\frac{N}{1-\kappa}$. Cependant, il est souvent préférable d’avoir des approximations uniformes à sa disposition sur tout le domaine d’étude. Ceci semble même indispensable si on veut obtenir des estimations de type Gevrey.

3. Dans les cas où on peut démontrer indirectement l’existence d’un développement combiné pour une fonction $y(x, \eta)$, mais qu’on ne connaît pas encore les fonctions a_n et g_n , une méthode pour les déterminer est d’appliquer la proposition précédente. Pour x fixé différent de 0, on calcule le développement extérieur $y(x, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} c_n(x) \eta^n$, puis on rejette les termes avec des puissances négatives. On obtient ainsi les $a_n(x)$. Ensuite, on calcule le développement intérieur $y(\eta X, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} h_n(X) \eta^n$ et on rejette les termes de puissances positives de X , ce qui donne les $g_n(X)$.

Dans des situations concrètes, le calcul des développements extérieur et intérieur mène souvent à des équations de récurrence pour leurs coefficients. Ceci permet donc le calcul des a_n, g_n sans avoir à utiliser les formules techniques pour la multiplication de séries formelles combinées.

Dans le cas des équations différentielles singulièrement perturbées, comme le remarquent Emmanuel Isambert et Véronique Gautheron dans [23], le calcul du développement extérieur ne fait intervenir que des opérations algébriques (une fois donnés les développements de Taylor des coefficients de l’équation) alors que celui du développement intérieur nécessite d’intégrer des équations différentielles linéaires, puis de choisir la constante d’intégration pour que la solution ait un comportement asymptotique bien déterminé, ce qui introduit de la transcendance. Dans [24], Emmanuel Isambert appelle ainsi ces développements extérieur et intérieur respectivement *algebraic* et *transcendental expansions*.

Preuve. Fixons $N \in \mathbb{N}^*$ et reprenons la notation (3.11). Notons de plus

$$r_{lk}(X) = g_l(X) - \sum_{0 < m < k} g_{lm}X^{-m}.$$

Par hypothèse, il existe des constantes positives C_N, A_{kn} et C_{lk} telles que

$$\begin{aligned} \forall \eta \in S_2 \quad \forall x \in V_{1,\eta} := V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|) \quad & |R_N(x, \eta)| \leq C_N |\eta|^N, \\ \forall x \in V_{1,\eta} \quad & \left| a_k(x) - \sum_{l < n} a_{kl}x^l \right| \leq A_{kn} |x|^n \end{aligned} \quad (3.16)$$

et

$$\forall X \in V \quad |r_{lk}(X)| \leq C_{lk} |X|^{-k}. \quad (3.17)$$

Un calcul élémentaire donne

$$\begin{aligned} y(x, \eta) - \sum_{n < N} c_n(x) \eta^n &= R_N(x, \eta) + \sum_{l < N} g_l\left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^l - \sum_{0 < n < N} \left(\sum_{l < n} g_{l, n-l} x^{l-n} \right) \eta^l \\ &= R_N(x, \eta) + \sum_{l < N} r_{l, N-l}\left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^l, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donc, quand $|x| > r$,

$$\left| y(x, \eta) - \sum_{n < N} c_n(x) \eta^n \right| \leq \left(C_N + \sum_{l < N} C_{l, N-l} r^{l-N} \right) |\eta|^N. \quad (3.19)$$

De même, on a

$$\begin{aligned} y(\eta X, \eta) - \sum_{n < N} h_n(X) \eta^n &= R_N(\eta X, \eta) + \sum_{n < N} \left(a_n(\eta X) - \sum_{l \leq n} a_{n-l} X^l \right) \eta^n \\ &= R_N(\eta X, \eta) + \sum_{k < N} \left(a_k(\eta X) - \sum_{l < N-k} a_{kl} \eta^l X^l \right) \eta^k \end{aligned}$$

d'où, pour tout $R > 0$ et pour $|X| \leq R$,

$$\left| y(\eta X, \eta) - \sum_{n < N} h_n(X) \eta^n \right| \leq \left(C_N + \sum_{k < N} A_{k, N-k} R^{N-k} \right) |\eta|^N. \quad (3.20)$$

□

Concernant la réciproque, l'énoncé est le suivant.

Proposition 3.11 . Soit y une fonction définie pour $\eta \in S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ et $x \in V(\eta) = V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu |\eta|)$. On suppose qu'il existe des nombres réels a, b, κ avec $0 < a < b$ et $0 < \kappa < 1$, et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une fonction c_n , $c_n(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + a_n(x)$, P_n polynomial sans terme constant, $a_n \in \mathcal{H}(r_0)$ et une fonction $h_n = Q_n + g_n$, Q_n polynomial et $g_n \in \mathcal{G}(V)$, $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$, $\alpha \leq \alpha_1 - \beta_2 < \beta_1 - \alpha_2 \leq \beta$, avec les propriétés suivantes.

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| y(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} c_n(x) \eta^n \right| \leq C |\eta|^{N(1-\kappa)} \quad (3.21)$$

pour tout $\eta \in S_2$ et $x \in V(\eta)$ avec $|x| > a|\eta|^\kappa$ et

$$\left| y(\eta X, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} h_n(X) \eta^n \right| \leq C |\eta|^{N\kappa} \quad (3.22)$$

pour tout $\eta \in S_2$ et $X \in V$ tels que $\eta X \in V(\eta)$ avec $|X| < b|\eta|^{\kappa-1}$.

2. Pour tout n , les polynômes P_n et Q_n sont de degré inférieur à n .

Alors y admet un DAC pour $\eta \in S_2$ et $x \in V(\eta)$; précisément

$$y(x, \eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n.$$

REMARQUES . 1. Comme il y a une région commune aux développements (3.21) et (3.22), les développements doivent être compatibles, ce que montre la preuve, c.f. (3.25).

2. On ne peut pas avoir mieux que $|\eta|^{n(1-\kappa)}$ dans le reste de (3.21) et $|\eta|^{n\kappa}$ dans celui de (3.22) en général, car les premiers termes négligés ont cette taille lorsque P_N et Q_N sont de degré N .

3. Cet énoncé est un cas particulier d'un théorème général du livre [15] de W. Eckhaus. Dans le procédé classique, on établit d'abord des développements intérieurs et extérieurs sur des domaines qui croissent quand $\eta \rightarrow 0$ et qui ont une intersection non vide. Ensuite, on construit des développements dites « composites » dont nos DAC sont donc un exemple, c.f. aussi la partie 8.

Preuve. Notons $c_n(x) = \sum_{m=-n}^{+\infty} c_{nm} x^m$ et M_{nN} le plus grand entier M tel que $M\kappa + n \leq N(1 - \kappa)$. Alors (3.21) entraîne que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_2 > 0$ tel que

$$\left| y(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^{M_{nN}} c_{nm} x^m \eta^n \right| \leq C_2 |\eta|^{N(1-\kappa)}$$

quand $\eta \in S_2$ et $x \in V(\eta)$, $a|\eta|^\kappa < |x| < b|\eta|^\kappa$. Pour tout entier S , on peut donc trouver une constante C_3 telle que

$$\left| y(x, \eta) - \sum_{n \geq 0, m \geq -n, m\kappa + n < S} c_{nm} x^m \eta^n \right| \leq C_3 |\eta|^S \quad (3.23)$$

quand $\eta \in S_2$ et $x \in V(\eta)$, $a|\eta|^\kappa < |x| < b|\eta|^\kappa$.

De manière analogue, en notant $h_n(X) \sim \sum_{m=-n}^{+\infty} z_{nm} X^{-m}$, on trouve en remplaçant X par $\frac{x}{\eta}$ que, pour tout entier S , il existe une constante C_4 telle que

$$\left| y(x, \eta) - \sum_{p \geq 0, q \geq -p, -q(\kappa-1) + p < S} z_{pq} x^{-q} \eta^{p+q} \right| \leq C_4 |\eta|^S \quad (3.24)$$

quand $\eta \in S_2$ et $x \in V(\eta)$, $a|\eta|^\kappa < |x| < b|\eta|^\kappa$.

Comme (3.23) et (3.24) déterminent de manière unique les coefficients c_{nm} et z_{pq} , ceux-ci doivent coïncider, i.e. $c_{nm} = z_{n+m, -m}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq -n$. On a donc l'égalité formelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{h}_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{c}_n(x) \eta^n, \quad (3.25)$$

dans laquelle \hat{h}_n et \hat{c}_n désignent les séries associées à h_n et c_n .

Considérons maintenant la somme $Y_N(x, \eta) = \sum_{n=0}^N \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$. Quand $a|\eta|^\kappa < |x|$, on trouve avec $\left| g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) - \sum_{q=1}^{N-n-1} z_{nq} x^{-q} \eta^q \right| \leq C_5 |\eta|^{(N-n)(1-\kappa)}$ et donc avec $z_{nq} = c_{n+q, -q}$

$$|y(x, \eta) - Y_N(x, \eta)| \leq \left| y(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_n(x) + \sum_{m=1}^n c_{n, -m} x^{-m} \right) \eta^n \right| + C_6 |\eta|^{N(1-\kappa)}.$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} |y(x, \eta) - Y_N(x, \eta)| &\leq \left| y(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} c_n(x) \eta^n \right| + C_6 |\eta|^{N(1-\kappa)} \\ &\leq C_7 |\eta|^{N(1-\kappa)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

quand $\eta \in S_2$, $x \in V(\eta)$, $a|\eta|^\kappa < |x|$.

En utilisant les développements des a_n , on trouve de manière analogue, que

$$|y(x, \eta) - Y_N(x, \eta)| \leq C_8 |\eta|^{N\kappa}$$

aussi quand $\eta \in S_2$, $x \in V(\eta)$, $|x| < b|\eta|^\kappa$. Ensemble avec (3.26), ceci démontre que, pour tout N , il existe une constante C_9 telle que pour tout $\eta \in S_2$ et $x \in V(\eta)$ on a $|y(x, \eta) - Y_N(x, \eta)| \leq C_9 |\eta|^{N\lambda}$ avec $\lambda = \min(\kappa, 1 - \kappa)$.

L'énoncé à démontrer correspond à $|\eta|^N$ au lieu de $|\eta|^{N\lambda}$ dans cette dernière inégalité. On l'obtient en deux temps. D'une part cette dernière assertion peut aussi s'écrire : il existe C_{10} avec $|y(x, \eta) - Y_S(x, \eta)| \leq C_{10} |\eta|^N$, si $S\lambda > N$. D'autre part le fait que toutes les fonctions $a_n(x)$ et $g_n\left(\frac{x}{\eta}\right)$ soient bornées sur l'ensemble des x, η en question entraîne qu'il existe une constante C_{11} telle que $|Y_S(x, \eta) - Y_N(x, \eta)| \leq C_{11} |\eta|^N$. \square

3.5 Prolongements de développements combinés.

En relation avec les développements intérieurs de la méthode de recollement, nous avons aussi des résultats de prolongement de DAC, qui nous seront bien utiles pour les solutions d'équations différentielles. Le premier résultat dit essentiellement qu'une fonction ayant un DAC pour x dans un quasi-secteur, dont le développement intérieur existe sur un quasi-secteur plus grand, admet le DAC aussi sur le grand quasi-secteur. Le résultat précis est le suivant.

Proposition 3.12 . Soit y une fonction définie pour $\eta \in S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ et $x \in V_1(\eta) = V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$ et ayant un DAC $\sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$, quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V_1(\eta)$, avec $a_n \in \mathcal{H}(r_0)$ et $g_n \in \mathcal{G}(V)$, où $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$, $\alpha = \alpha_1 - \beta_2$ et $\beta = \beta_1 - \alpha_2$. Soit $\nu > \mu$. Dans le cas où

$\nu > |\mu|$, on pose $\Omega = D(0, \nu)$, sinon on pose $\Omega = V(\alpha, \beta, -\mu + \gamma, \nu)$ avec $\gamma > 0$ arbitrairement petit.

On suppose que la fonction $Y : (X, \eta) \mapsto y(\eta X, \eta)$ peut être prolongée analytiquement sur $\Omega \times S_2$ et qu'elle admet un développement asymptotique $Y(X, \eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} h_n(X) \eta^n$ quand η tend vers 0, uniformément sur Ω .

Alors y peut être prolongée analytiquement sur l'ensemble des (x, η) avec $\eta \in S_2$ et avec $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \nu|\eta|)$ et y admet un DAC quand $\eta \rightarrow 0$.

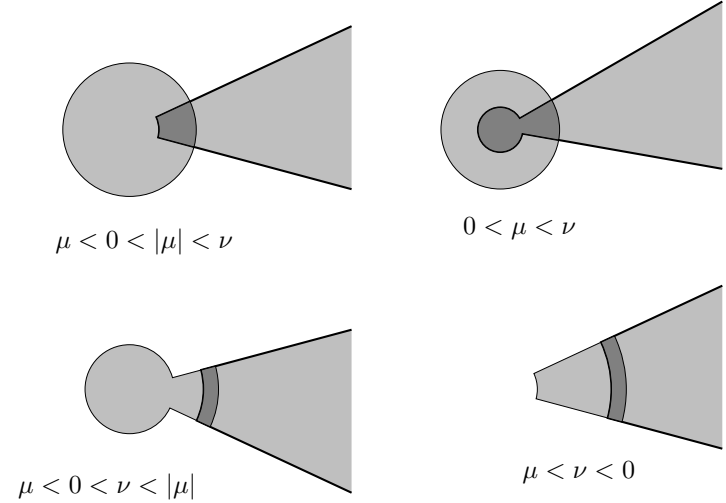


FIGURE 3.2 – Quelques domaines V et Ω suivant les signes de μ , $|\mu| - \nu$ et ν . En trait gras le bord de V , en trait fin celui de Ω , en gris foncé leur intersection.

REMARQUES. 1. Le domaine Ω a été choisi de façon à avoir Ω borné, $\Omega \cap V \neq \emptyset$ et $V \cup \Omega = V(\alpha, \beta, \infty, \nu)$. Les signes de μ et ν sont arbitraires. Nous utilisons ce résultat en particulier dans le cas $\mu < 0 < \nu$.

2. L'hypothèse sur le domaine et le développement asymptotique de Y pourrait être un peu affaiblie (le domaine par rapport à X pourrait dépendre de l'argument de η), mais la version présentée suffit pour nos applications aux équations différentielles.

3. Il est possible de montrer ce résultat en utilisant les propositions 3.10 et 3.11, mais nous préférons présenter une preuve indépendante. Une raison pour ce choix est que cette preuve servira pour l'analogue Gevrey, la proposition 4.4. Par contre nous n'avons pas d'analogue Gevrey de la proposition 3.11.

Preuve. Le développement de Y de l'hypothèse et le développement intérieur correspondant au DAC de y donné par la proposition 3.10 coexistent sur un certain ouvert, donc coïncident par l'unicité d'un développement asymptotique. Ainsi, les

$h_n(X)$ de l'énoncé sont nécessairement les prolongements analytiques des coefficients de ce développement intérieur.

L'hypothèse entraîne que $y(x, \eta)$ peut être prolongée analytiquement sur l'ensemble des (x, η) tels que $\eta \in S_2$ et $x \in \tilde{V}_1(\eta) = V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \nu|\eta|)$, précisément en posant $y(x, \eta) = Y(\frac{x}{\eta}, \eta)$. Nous reprenons maintenant les notations de la preuve précédente. Il s'agit de montrer que le reste $R_N(x, \eta)$ donné par (3.11) est majoré par une constante fois $|\eta|^N$, aussi pour $x \in \tilde{V}_1(\eta) \setminus V_1(\eta)$. L'hypothèse sur Ω assure que pour tout $\eta \in S_2$ et tout $x \in \tilde{V}_1(\eta) \setminus V_1(\eta)$, on a $x/\eta \in \Omega$. Par hypothèse, il existe D_N tel que

$$\left| y(x, \eta) - \sum_{n < N} h_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^n \right| \leq D_N |\eta|^N.$$

Par ailleurs, l'égalité au-dessus de (3.20) peut s'écrire

$$R_N(x, \eta) = y(x, \eta) - \sum_{n < N} h_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^n - \sum_{k < N} \left(a_k(x) - \sum_{l < N-k} a_{kl} x^l \right) \eta^k.$$

De plus, quitte à modifier les constantes A_{kn} , l'inégalité (3.16) est valable pour tout $x \in D(0, r_0)$, donc en particulier pour $x \in \tilde{V}_1(\eta) \setminus V_1(\eta)$. Ceci montre que pour tout $\eta \in S_2$ et pour tout $x \in \tilde{V}_1(\eta) \setminus V_1(\eta)$

$$|R_N(x, \eta)| \leq \left(D_N + \sum_{k < N} A_{kN-k} M^{N-k} \right) |\eta|^N \quad (3.27)$$

avec $M = \sup_{X \in \Omega} |X| = |\mu|$ ou ν . \square

Le deuxième résultat de prolongement concerne le prolongement vers l'extérieur.

Proposition 3.13 . Soit $0 < r_0 < \tilde{r}_0$ et soit y une fonction définie pour $\eta \in S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ et $x \in \tilde{V}_1(\eta) = V(\alpha_1, \beta_1, \tilde{r}_0, \mu|\eta|)$. On suppose que y a un DAC $\sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$, quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V_1(\eta) = V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$, avec $a_n \in \mathcal{H}(r_0)$ et $g_n \in \mathcal{G}(V)$, $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ tels que $\alpha \leq \alpha_1 - \beta_2 < \beta_1 - \alpha_2 \leq \beta$.

On suppose de plus que y admet un développement asymptotique $y(x, \eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) \eta^n$ quand η tend vers 0, uniformément pour $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0 - \gamma, \tilde{r}_0)$ avec $\gamma > 0$ arbitrairement petit.

Alors (3.9) est satisfait pour tout $\eta \in S_2$ et tout $x \in \tilde{V}_1(\eta)$.

REMARQUE. Par abus de langage, nous dirons que y a un DAC pour $\eta \in S_2$ et $x \in \tilde{V}_1(\eta)$, bien que les fonctions a_n ne soient a priori pas définies sur tout le disque $D(0, \tilde{r}_0)$.

Preuve. D'abord, on peut utiliser la proposition 3.10 sur le quasi-secteur $V(\alpha_1, \beta_1, r_0 - \gamma, r_0)$ et, en comparant (3.14) avec la deuxième hypothèse, on obtient que les fonctions c_n de l'hypothèse sont des prolongements analytiques de celles de la proposition. On peut donc aussi prolonger les fonctions a_n analytiquement sur $D(0, r_0) \cup V(\alpha_1, \beta_1, r_0 - \gamma, \tilde{r}_0)$.

Il faut encore majorer R_N pour $x \in \tilde{V}_1(\eta) \setminus V_1(\eta)$. Par (3.18), on a

$$R_N(x, \eta) = y(x, \eta) - \sum_{n < N} c_n(x) \eta^n - \sum_{l < N} r_{lN-l} \left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^l. \quad (3.28)$$

et par (3.17) $|r_{lN-l}(X)| \leq C_{lN-l} |X|^{l-N}$. Par hypothèse, il existe $A_N > 0$ tel que

$$|y(x, \eta) - \sum_{n < N} c_n(x) \eta^n| \leq A_N |\eta|^N$$

pour tout $\eta \in S_2$ et tout $x \in V_1(\eta) \setminus \tilde{V}_1(\eta)$. On obtient ainsi $|R_N(x, \eta)| \leq C |\eta|^N$ avec $C = A_N + \sum_{l < N} C_{lN-l} r_0^{l-N}$. \square

3.6 Quotients de DAC et une extension.

Quotients de DAC.

Nous étudions ici sous quelle condition l'inverse d'une fonction ayant un DAC admet un DAC. Soit $y = y(x, \eta)$ une fonction définie et analytique pour $\eta \in S = S(-\delta, \delta, \eta_0)$ et $x \in V(\alpha, \beta, r_0, \mu|\eta|)$ et ayant un DAC $y(x, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$ quand $\eta \rightarrow 0$. Nous proposons un énoncé un peu plus général, qui s'avère plus utile en pratique : sous quelle condition existe-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $(x, \eta) \mapsto \eta^k / y(x, \eta)$ admette un DAC.

D'après la proposition 3.10, y admet un développement intérieur

$$y(\eta X, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} h_n(X) \eta^n \quad \text{quand } S_2 \ni \eta \rightarrow 0,$$

uniformement par rapport à X sur des compacts de $S(\alpha_1, \beta_1, \infty)$ où $\alpha_1 = \alpha - \delta$, $\beta_1 = \beta + \delta$ et

$$h_n(X) = g_n(X) + \sum_{0 \leq l \leq n} a_{l, n-l} X^{n-l}. \quad (3.29)$$

Pour tout n , notons $\sum_{m=-n}^{+\infty} h_{nm} X^{-m}$ le développement asymptotique à l'infini

de h_n et $\mathbf{v}_n = \text{val}(h_n)$ le minimum des $m \geq -n$ tels que $h_{nm} \neq 0$. Si h_n est plate, on note $\mathbf{v}_n = \text{val}(h_n) = +\infty$. Nous disons que y est *dégénérée*, si elle est plate ou s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $h_0 = \dots = h_{N-1} = 0$ et $h_N \neq 0$ est plate. Si y n'est pas dégénérée, notons $C(y)$ le couple (N, M) de $N \in \mathbb{N}$ tel que $h_0 = \dots = h_{N-1} = 0$, $h_N \neq 0$ et $M = \text{val}(h_N) \geq -N$.

Corollaire 3.14 . Avec les notations précédentes, les trois conditions suivantes sont équivalentes.

- (a) Il existe $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{\eta}_0 < \eta_0$, $\tilde{r}_0 < r_0$ et $\tilde{\mu} \leq \mu$ tels que la fonction $(x, \eta) \mapsto \eta^k / y(x, \eta)$ admette un DAC quand $\eta \rightarrow 0$ dans $\tilde{S} = S(-\delta, \delta, \tilde{\eta}_0)$ et $x \in V(\alpha, \beta, \tilde{r}_0, \tilde{\mu})$.

- (b) y est non dégénérée et, si $C(y) = (N, M)$, on a $\text{val}(h_n) \geq M - n + N$ pour tout $n \geq N$.
- (c) Il existe $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ tels que la fonction $(x, \eta) \mapsto \eta^{-k} x^\ell y(x, \eta)$ admet un DAC dont le premier coefficient lent \tilde{a}_0 satisfait $\tilde{a}_0(0) \neq 0$.

REMARQUES . 1. La deuxième condition du (b) peut aussi être écrite en utilisant le développement extérieur et ceux de ses coefficients. On a la relation (3.25).

2. Graphiquement, la deuxième condition dans (b) signifie que les points du plan de coordonnées (n, m) tels que $h_{nm} \neq 0$ (le « support » du développement intérieur) sont tous dans la partie du plan à droite et au-dessus des droites verticale et de pente -1 passant par $C(y)$. Puisque h_n a une partie polynomiale de degré au plus n , on sait déjà que ce support est dans le quart de plan à droite et au-dessus de l'axe des ordonnées et de la deuxième bissectrice. Le changement de variable $y \rightarrow z : (x, \eta) \mapsto \eta^{-k} x^\ell y(x, \eta)$ induit justement une translation de $-C(y) = (-N, -M)$ sur les supports, avec $N = k - \ell$ et $M = \ell$.

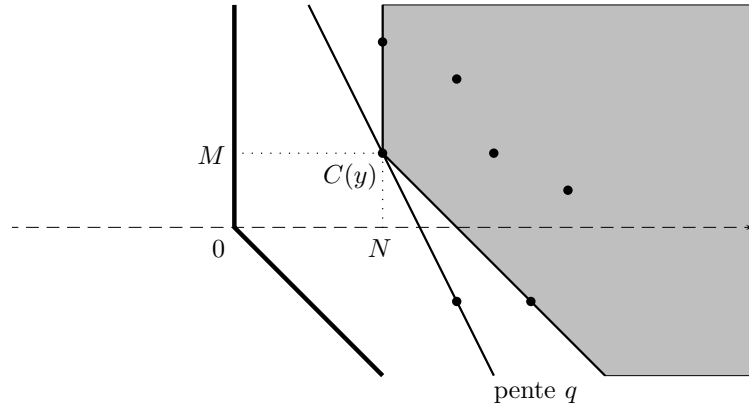


FIGURE 3.3 – En grisé, la partie du plan contenant le support du développement intérieur de y . En gras, le bord de la partie analogue pour z .

3. La démonstration donne aussi une procédure pour obtenir ce DAC : par la translation précédente, on se ramène au cas où y a un premier terme a_0 lent non nul en $x = 0$ et on compose le DAC par l'inversion $u \mapsto 1/u$.

Preuve. Nous montrons les implications (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a) \Rightarrow (b). Supposons que la condition (b) est satisfaite.

Si $M < 0$, considérons d'abord $z(x, \eta) = (\frac{x}{\eta})^{-M} y(x, \eta)$. Comme produit de deux fonctions admettant des DAC, z a un DAC sur le même domaine que y . Le développement intérieur correspondant est celui de $X^M y(\eta X, \eta)$ et satisfait donc une condition analogue à (b) avec $(N, 0)$ à la place de (N, M) .

Si $M > 0$, considérons $z(x, \eta) = x^M y(x, \eta)$. Comme avant, z admet un DAC et le développement intérieur correspondant est celui de $\eta^M X^M y(\eta X, \eta)$ et satisfait donc une condition analogue à (b) avec $(N + M, 0)$ à la place de (N, M) . Les deux cas $M > 0$ et $M < 0$ peuvent donc être réduits au cas $M = 0$.

Si $M = 0$, alors la formule (3.29) et la condition sur les h_n montrent que $a_{sm} = 0$ pour $0 \leq s < N$ et $m \geq 0$, et que $a_{N0} \neq 0$. Comme les fonctions a_s sont analytiques, ceci implique $a_s = 0$ pour $s = 0, \dots, N - 1$. Alors la fonction $\tilde{y} : (x, \eta) \mapsto \eta^{-N} y(x, \eta)$ a aussi un DAC sur le même domaine que y et satisfait la condition (c). En résumé, dans les trois cas y satisfait la condition (c) avec $k = N + M$ et $\ell = M$.

Supposons maintenant la condition (c) satisfaite et posons $z(x, \eta) = \eta^{-k} x^\ell y(x, \eta)$. Pour \tilde{r}_0 et $\tilde{\eta}_0$ assez petits et $\tilde{\mu} \leq \mu$ convenable, la fonction z ne s'annule pas si $\eta \in \tilde{S} = S(-\delta, \delta, \tilde{\eta}_0)$ et $x \in V(\alpha, \beta, \tilde{r}_0, \tilde{\mu})$. La proposition 3.5 (b) s'applique avec la fonction $f : u \mapsto 1/u$ et on en déduit que $1/z$ a un DAC. Dans le cas où $\ell \geq 0$, la fonction $(x, \eta) \mapsto x^\ell / z(x, \eta)$ a donc, elle aussi, un DAC, ce qui prouve (a). Dans le cas $\ell < 0$, c'est la fonction $(x, \eta) \mapsto (\frac{x}{\eta})^\ell / z(x, \eta)$ qui a un DAC, ce qui donne (a) avec $k - \ell$ au lieu de k .

Supposons enfin que la condition (a) est satisfaite, posons $\tilde{y}(x, \eta) = \eta^k / y(x, \eta)$ et notons \tilde{h}_n les coefficients du développement intérieur de \tilde{y} . Puisque $(y\tilde{y})(x, \eta) = \eta^k$, c'est qu'il existe un premier terme non identiquement nul h_r dans le développement intérieur de y et un premier terme \tilde{h}_s pour \tilde{y} , avec $r + s = k$ et $h_r \tilde{h}_s = 1$. Chacune de ces fonctions est à croissance polynomiale lorsque $X \rightarrow \infty$ donc aucune ne peut être plate. Ainsi les deux fonctions y et \tilde{y} sont non dégénérées. On note $(N, M) = C(y)$ et $(\tilde{N}, \tilde{M}) = C(\tilde{y})$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $n > N$ tel que $\text{val}(h_n) < M - n + N$. Notons $q = \min \{ \frac{\text{val}(h_s) - M}{s - N} ; s > N \} < -1$ et $\mathcal{M} = \{ s \geq N ; \text{val}(h_s) - sq = M - Nq \}$; c'est un ensemble de cardinal au moins 2 (contenant au moins N et un s réalisant le minimum q) et fini (puisque $\text{val}(h_s) \geq -s$).

Si \tilde{y} satisfait la condition (b), on pose $\tilde{q} = -1$, sinon \tilde{q} est l'analogue de q pour y . Quitte à échanger les rôles de \tilde{y} et y , on peut supposer sans perte que $q \leq \tilde{q}$. Notons alors $K = \min \{ \text{val}(\tilde{h}_s) - sq ; s > \tilde{N} \}$ et \mathcal{N} l'ensemble fini non vide des $s \in \mathbb{N}$ tels que $\text{val}(\tilde{h}_s) - sq = K$. Remarquons que $\mathcal{N} = \{ \tilde{N} \}$ si $\tilde{q} > q$ et que le cardinal de \mathcal{N} est au moins 2 si $\tilde{q} = q$.

Rappelons que le minimum de \mathcal{M} est $n_1 = N$, et notons $n_2 = \max \mathcal{M}$; notons \tilde{n}_1 et \tilde{n}_2 le minimum et le maximum de \mathcal{N} . Considérons le développement intérieur de $p = y\tilde{y} : p(\eta X, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} p_n(X) \eta^n$. On a donc $p_n = \sum_{r+s=n} h_r \tilde{h}_s$ pour tout $n \geq 0$. Si $n = n_1 + \tilde{n}_1$ alors $h_{n_1} \tilde{h}_{\tilde{n}_1}$ a la valuation $M + \tilde{n}_1 + K = M - Nq + nq + K$; si $r + s = n = n_1 + \tilde{n}_1$ avec $r \neq n_1$, alors la valuation de $h_r \tilde{h}_s$ est strictement supérieure à ce nombre à cause du choix de n_1 et \tilde{n}_1 . On obtient donc $p_{n_1 + \tilde{n}_1} \neq 0$. De manière analogue, on obtient aussi $p_{n_2 + \tilde{n}_2} \neq 0$. Puisque $n_1 < n_2$ et $\tilde{n}_1 \leq \tilde{n}_2$, ceci contredit l'hypothèse que le produit $y\tilde{y}$ est réduit au monôme η^k . \square

Une extension .

Appelons provisoirement *point tournant* d'une fonction y un point au voisinage duquel y admet un DAC. Pour terminer cette partie, nous voudrions

discuter le cas d'un domaine ayant deux points tournants sur sa frontière. L'énoncé qui suit montre qu'il est inutile de généraliser la notion de DAC pour des développements uniformes sur des domaines ayant plusieurs points tournants sur leur frontière, car on peut se ramener au cas d'un seul point tournant. Pour simplifier, nous nous sommes placés dans le cas d'un intervalle réel.

Proposition 3.15 . Soit $a < b < c < d$ quatre nombres réels et soit $y :]a, d[\times]0, \eta_1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un DAC

$$y(x, \eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x-a}{\eta}\right) \right) \eta^n$$

quand $\eta \rightarrow 0$, uniformément sur $]a, c[$, avec a_n holomorphe dans un voisinage de $[a, c]$ et $g_n \in \mathcal{G}(S)$, $S = S(-\delta, \delta, \infty)$ avec un certain $\delta > 0$.

On suppose que y admet aussi un DAC

$$y(x, \eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n(x) + h_n\left(\frac{d-x}{\eta}\right) \right) \eta^n$$

quand $\eta \rightarrow 0$, uniformément sur $]b, d[$, avec b_n holomorphe dans un voisinage de $[b, d]$ et $h_n \in \mathcal{G}(S)$.

Alors y admet un développement asymptotique

$$y(x, \eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n(x) + g_n\left(\frac{x-a}{\eta}\right) + h_n\left(\frac{d-x}{\eta}\right) \right) \eta^n \quad (3.30)$$

quand $\eta \rightarrow 0$, uniforme sur $]a, d[$ avec les g_n, h_n des formules précédentes et avec des fonctions c_n holomorphes sur un voisinage de $[a, d]$.

Précisément, si $g_n(X) \sim \sum_{m=1}^{\infty} g_{nm} X^{-m}$ et $h_n(X) \sim \sum_{m=1}^{\infty} h_{nm} X^{-m}$ quand $X \rightarrow \infty$, alors $c_n(x) = a_n(x) - \sum_{\ell=0}^{n-1} h_{\ell n-\ell} (d-x)^{\ell-n}$ quand x est dans un voisinage de $[a, c]$ et $c_n(x) = b_n(x) - \sum_{\ell=0}^{n-1} g_{\ell n-\ell} (x-a)^{\ell-n}$ quand x est dans un voisinage de $[b, d]$.

REMARQUE. Les fonctions c_n sont donc les parties non polaires des fonctions b_n au point $x = a$ et les parties non polaires des fonctions a_n au point $x = d$.

Preuve succincte. Par le théorème de Borel-Ritt classique, on construit deux fonctions g, h avec $g(X, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} g_n(X) \eta^n$ et $h(X, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} h_n(X) \eta^n$ uniformément sur S . On considère alors la différence $z(x, \eta) = y(x, \eta) - g\left(\frac{x-a}{\eta}, \eta\right) - h\left(\frac{d-x}{\eta}, \eta\right)$. La proposition 3.10, appliquée à h respectivement g , montre qu'elle admet deux développements uniformes lents sur $[a, c]$ et sur $[b, d]$. Par unicité des développements asymptotiques, ils doivent coïncider sur $[b, c]$. Ceci implique que leurs coefficients doivent être des prolongements les uns des autres et on obtient l'énoncé. \square

4 Développements asymptotiques combinés : étude Gevrey.

Dans la suite de l'article (sections 6 et 7) nous appliquerons les DAC à des problèmes d'équations différentielles singulièrement perturbées. Nous verrons à cette occasion que les notions de séries formelles combinées Gevrey et de DAC de type Gevrey jouent un rôle clé. Cette notion Gevrey a déjà joué un rôle essentiel dans la théorie classique des séries formelles et des développements asymptotiques dans les applications à la perturbation singulière [8, 5]. À partir de maintenant, p désigne un entier positif. En général (sauf dans la partie 6.1) cet entier sera supérieur ou égal à 2.

4.1 Séries formelles combinées Gevrey.

Définition 4.1 . Soit $r_0 > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ donné par (3.1) ou (3.2) et soit

$$\hat{y}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \in \hat{\mathcal{C}}(r_0, V),$$

où $g_n(X) \sim \sum_{m > 0} g_{nm} X^{-m}$ quand $V \ni X \rightarrow \infty$. Nous disons que \hat{y} est Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ et de type (L_1, L_2) , s'il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sup_{|x| < r_0} |a_n(x)| \leq C L_1^n \Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)$ et pour tout $n, M \in \mathbb{N}$ et tout $X \in V$ on a

$$|X|^M \left| g_n(X) - \sum_{m=1}^{M-1} g_{nm} X^{-m} \right| \leq C L_1^n L_2^M \Gamma\left(\frac{M+n}{p} + 1\right). \quad (4.1)$$

Nous disons que des fonctions $g_n(X)$, $n = 0, 1, \dots$, holomorphes sur V admettent des développements asymptotiques Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ compatibles (de type (L_1, L_2)), s'il existe une constante C telle que (4.1) est satisfaite pour tout $n, M \in \mathbb{N}$ et $X \in V$.

Nous avons inclus la notion de type dans la définition, mais nous utiliserons peu cette notion dans le présent mémoire.

Il serait possible de formuler (4.1) avec des produits $\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right) \Gamma\left(\frac{M}{p} + 1\right)$ en vertu des inégalités

$$\Gamma(a+1) \Gamma(b+1) \leq \Gamma(a+b+1) \leq 2^{a+b} \Gamma(a+1) \Gamma(b+1), \text{ quand } a, b > 0 \quad (4.2)$$

mais nous préférons l'écriture (4.1), qui simplifie certaines preuves. On déduit facilement de (4.1) (avec successivement $M = m$ et $M = m+1$) que

$$|g_{nm}| \leq C L_1^n L_2^m \Gamma\left(\frac{m+n}{p} + 1\right) \quad (4.3)$$

pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. Pour $M \geq 1$, les inégalités (4.1) sont équivalentes à $|X| |(\mathbf{T}^{M-1}g_n)(X)| \leq CL_1^n L_2^M \Gamma(\frac{M+n}{p} + 1)$ avec l'opérateur \mathbf{T} de (3.3).

Il nous sera utile de ne pas avoir à montrer les inégalités (4.1) pour X proche de 0, d'où la remarque qui suit.

Remarque 4.2 . Les fonctions $g_n(X)$, $n = 0, 1, \dots$, admettent des développements asymptotiques Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ compatibles de type (L_1, L_2) si et seulement s'il existe deux constantes $C, T > 0$ telles que

$$\sup_{X \in V} |g_n(X)| \leq CL_1^n \Gamma(\frac{n}{p} + 1) \quad (4.4)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telles que

$$\left| g_n(X) - \sum_{m=1}^{M-1} g_{nm} X^{-m} \right| \leq CL_1^n L_2^M \Gamma(\frac{M+n}{p} + 1) |X|^{-M} \quad (4.5)$$

pour tout $n, M \in \mathbb{N}$ et tout $X \in V$ avec $|X| > T$.

Preuve. L'implication directe est évidente (pour (4.4), choisir $M = 0$). Pour la réciproque, il s'agit de montrer, à partir de (4.4) et (4.5), que (4.1) est aussi vrai pour les $X \in V$ avec $|X| \leq T$. Tout d'abord (4.5) implique (4.3). En utilisant (4.2) on obtient

$$\begin{aligned} |X|^M \left| g_n(X) - \sum_{m=1}^{M-1} g_{nm} X^{-m} \right| &\leq T^M CL_1^n \Gamma(\frac{n}{p} + 1) + \\ &\quad \sum_{m=1}^{M-1} CL_1^n L_2^m \Gamma(\frac{m+n}{p} + 1) T^{M-m} \\ &\leq \tilde{C} L_1^n L_2^M \Gamma(\frac{M+n}{p} + 1) \end{aligned}$$

avec $\tilde{C} = C \sum_{k \geq 1} \left(\frac{T}{L_2} \right)^k \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{p} + 1)}$. \square

Les inégalités (4.1) sont également indispensables pour la compatibilité de la nouvelle notion avec les opérations élémentaires. Nous laissons les cas de l'addition et de la dérivation comme exercices ; l'énoncé (et sa preuve) pour la dérivation est analogue au lemme 3.6. Nous démontrons ci-dessous la compatibilité avec la multiplication.

Considérons d'abord le cas classique d'un produit $\hat{c}(x, \eta) = \hat{a}_1(x, \eta) \hat{a}_2(x, \eta)$ de deux séries formelles $\hat{a}_j(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} a_{jn}(x) \eta^n$ Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$. Si $\sup_{|x| < r_0} |a_{jn}(x)| \leq C_j L_j^n \Gamma(\frac{n}{p} + 1)$ pour $j = 1, 2$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient pour les coefficients de \hat{c}

$$\sup_{|x| < r_0} |c_n(x)| \leq C_1 C_2 \max(L_1, L_2)^n \sum_{l=0}^n \Gamma(\frac{l}{p} + 1) \Gamma(\frac{n-l}{p} + 1)$$

et on obtient le caractère Gevrey de \hat{c} de l'inégalité

$$\sum_{\nu=0}^n \Gamma(\frac{n-\nu}{p} + 1) \Gamma(\frac{\nu}{p} + 1) \leq K_p \Gamma(\frac{n}{p} + 1) \quad (4.6)$$

avec la constante $K_p = 2 \left(1 + \Gamma(\frac{1}{p} + 1) + \dots + \Gamma(\frac{p-1}{p} + 1) \right) + 2p$.

Considérons maintenant un produit $\hat{h}(x, \eta) = \hat{g}_1(x, \eta) g_2(x, \eta)$ de deux séries formelles $\hat{g}_j(x, \eta) = \sum g_{jn}(\frac{x}{\eta}) \eta^n$ Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ et supposons d'après la remarque 4.2 que $\sup |g_{jn}(X)| \leq C_j L_j^n \Gamma(\frac{n}{p} + 1)$ pour tout n . On montre comme avant que les coefficients h_n de \hat{h} satisfont

$$\sup |h_n(X)| \leq K_p C_1 C_2 \max(L_1, L_2)^n \Gamma(\frac{n}{p} + 1).$$

Il faut encore montrer que les $h_n(X)$ admettent des développements asymptotiques Gevrey compatibles, i.e. (4.5).

On suppose donc (sans perte avec les mêmes constantes)

$$|X| |\mathbf{T}^{M-1} g_{jn}(X)| \leq CL_1^n L_2^M \Gamma(\frac{M+n}{p} + 1)$$

pour tout n, M avec $M \geq 1$ ainsi que la même majoration pour les g_{jnm} . On a à estimer $|X| |\mathbf{T}^{M-1} h_n(X)|$ avec $h_n = \sum_{\nu=0}^n g_{1\nu} g_{2, n-\nu}$. En utilisant plusieurs fois la formule $\mathbf{T}(f\tilde{f}) = \mathbf{T}(f)\tilde{f} + f_1 \tilde{f}$ pour chaque terme de cette somme, on obtient

$$|X| |\mathbf{T}^{M-1} h_n(X)| \leq C^2 L_1^n L_2^M \sum_{\nu=0}^n \sum_{m=1}^M \Gamma(\frac{\nu+m}{p} + 1) \Gamma(\frac{n-\nu+M-m}{p} + 1).$$

De manière analogue à (4.2), on montre l'existence d'une constante \tilde{K} telle qu'on a pour tout n, M

$$\sum_{\nu=0}^n \sum_{m=0}^M \Gamma(\frac{\nu+m}{p} + 1) \Gamma(\frac{n-\nu+M-m}{p} + 1) \leq \tilde{K} \Gamma(\frac{M+n}{p} + 1).$$

Ceci complète la majoration des termes $|X| |\mathbf{T}^{M-1} h_n(X)|$.

Il reste à traiter le cas mixte. Soit $\hat{y}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \eta^n$ et $\hat{z}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} g_n(\frac{x}{\eta}) \eta^n$ deux séries formelles combinées Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ de type (L_1, L_2) selon la définition 4.1. Notons $a_n(x) = \sum_{m \geq 0} a_{nm} x^m$ quand $|x| < r_0$ et $g_n(X) \sim \sum_{m \geq 1} g_{nm} X^{-m}$ quand $X \rightarrow \infty$. D'après la définition du produit de séries formelles combinées, on a

$$(\hat{y} \cdot \hat{z})(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \eta^n \sum_{\nu=0}^n (I(a_\nu) I(g_{n-\nu}))(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} (b_n(x) + h_n(\frac{x}{\eta})) \eta^n, \quad (4.7)$$

où

$$b_n(x) = \sum_{\nu+l+m=n} g_{l,m} (\mathbf{S}^m a_\nu)(x) \text{ et } h_n(X) = \sum_{\nu+l+m=n} a_{\nu m} (\mathbf{T}^m g_l)(X).$$

D'après l'hypothèse, on a

$$|a_{\nu m}| \leq CL_1^\nu \left(\frac{1}{r_0} \right)^m \Gamma(\frac{\nu}{p} + 1), \quad \sup |\mathbf{S}^m a_\nu| \leq CL_1^\nu \left(\frac{2}{r_0} \right)^m \Gamma(\frac{\nu}{p} + 1),$$

ainsi que

$$|g_{lm}| \leq CL_1^l L_2^m \Gamma(\frac{m+l}{p} + 1) \text{ et } \sup |\mathbf{T}^m g_l(X)| \leq CL_1^l L_2^m \Gamma(\frac{m+l}{p} + 1).$$

Ceci implique que

$$\sup |b_n(x)| \leq C^2 \sum_{\nu+l+m=n} L_1^l L_2^m \Gamma\left(\frac{m+l}{p} + 1\right) L_1^\nu \left(\frac{2}{r_0}\right)^m \Gamma\left(\frac{\nu}{p} + 1\right).$$

Quitte à agrandir L_1 , on peut supposer que $q := \frac{2L_2}{r_0 L_1} < 1$ et on obtient

$$\begin{aligned} \sup |b_n(x)| &\leq C^2 L_1^n \sum_{\nu+l+m=n} q^m \Gamma\left(\frac{m+l}{p} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{p} + 1\right) \\ &\leq \frac{C^2 L_1^n}{1-q} \sum_{\nu=0}^n \Gamma\left(\frac{n-\nu}{p} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{p} + 1\right). \end{aligned}$$

La majoration désirée de b_n est donc de nouveau une conséquence de l'inégalité (4.6). La majoration de $h_n(X)$ étant la même, il reste à vérifier que les $h_n(X)$ admettent des développements Gevrey d'ordres $\frac{1}{p}$ compatibles. Comme ceci équivaut à majorer

$$X \mathbf{T}^{M-1} h_n(X) = \sum_{\nu+l+m=n} a_{\nu m} X \mathbf{T}^{m+M-1} g_l(X),$$

ceci est de nouveau analogue à la démarche précédente.

Contrairement au cas de l'addition, de la multiplication et de la dérivation, la compatibilité de la notion de série formelle combinée Gevrey avec la composition à gauche ou à droite par une fonction analytique serait très fastidieuse et délicate à montrer en n'utilisant que la définition. Elle sera démontrée dans la partie 5.6 en utilisant la proposition 4.14 et le théorème-clé 5.1.

4.2 Développements asymptotiques combinés Gevrey.

La définition d'un DAC Gevrey est assez proche de la définition 3.4.

Définition 4.3 . Soit $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ un quasi-secteur infini (μ positif ou négatif), $S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ un secteur fini et soit $\alpha_1 < \beta_1$ tels que $\alpha \leq \alpha_1 - \beta_2 < \beta_1 - \alpha_2 \leq \beta$. Soit $y(x, \eta)$ une fonction holomorphe définie quand $\eta \in S_2$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu |\eta|)$ et $\hat{y}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \in \hat{\mathcal{C}}(r_0, V)$. Nous disons alors que y admet \hat{y} comme DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ et de type (L_1, L_2) et nous écrivons $y(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \hat{y}(x, \eta)$ quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu |\eta|)$, si $\hat{y}(x, \eta)$ est Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ de type (L_1, L_2) au sens de définition 4.1 et s'il existe une constante C , telle que pour tout N , pour tout $\eta \in S_2$ et tout $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu |\eta|)$,

$$\left| y(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \right| \leq C L_1^N \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right) |\eta|^N. \quad (4.8)$$

REMARQUE . Dans le cas d'une couronne, cette définition d'un DAC Gevrey est équivalente à celle de développement asymptotique monomial Gevrey ; c.f. [7], définition 3.6. Pour voir ceci, on procède de la même manière que dans la remarque 1 après notre définition 3.4. La condition (4.5) est automatiquement satisfaite dans ce cas, car les $g_n(X)$ sont holomorphes. Par contre, la notion de *sommabilité* monomiale de [7] n'a pas été généralisée pour les DAC dans notre mémoire. Un premier pas dans cette direction est constitué par la proposition 4.9.

La compatibilité de la définition 4.3 avec l'addition et la dérivation est laissée en exercice. Concernant l'intégration, les énoncés précis sont exactement les mêmes que dans les propositions 3.7 et 3.8 en remplaçant le symbole \sim par $\sim_{\frac{1}{p}}$ dans les hypothèses et dans les conclusions. En effet la majoration (4.3) montre que la suite $(g_{n1})_{n \in \mathbb{N}}$ est Gevrey et le théorème de Borel-Ritt-Gevrey classique [31] (voir le début de la preuve du lemme 4.10 dans la suite) fournit une fonction R asymptotique Gevrey à la série $\hat{R}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{n1} \eta^n$. Le reste des preuves est identique.

Nous détaillons ci-dessous la compatibilité avec la multiplication. Nous ne la démontrons que pour le cas d'un produit "mixte" de $y(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \hat{y}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \eta^n$ et $z(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \hat{z}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^n$, qui est le cas le plus intéressant. Écrivons

$$y(x, \eta) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n(x) \eta^n + P_N(x, \eta)$$

et

$$z(x, \eta) = \sum_{n=0}^{N-1} g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^n + Q_N(x, \eta)$$

où les deux restes sont majorés par $C L_1^N \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right) |\eta|^N$. La première majoration ci-dessous est classique ; c'est d'ailleurs la même pour les deux cas $a_1 a_2$ et $g_1 g_2$ non explicités.

$$\begin{aligned} |R_N(x, \eta)| &:= \left| (y \cdot z)(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} \eta^n \sum_{\nu=0}^n a_\nu(x) g_{n-\nu}\left(\frac{x}{\eta}\right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{N-1} P_n(x, \eta) g_{N-n}\left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^{N-n} + y(x, \eta) Q_N(x, \eta) \right| \\ &\leq C^2 L_1^N |\eta|^N \sum_{n=0}^N \Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right) \Gamma\left(\frac{N-n}{p} + 1\right) \end{aligned}$$

et (4.6) implique $|R_N(x, \eta)| \leq K_p C^2 L_1^N \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right)$ avec la constante K_p indiquée. En utilisant la notation de (4.7), il nous reste à majorer

$$\sum_{n=0}^{N-1} \eta^n \sum_{\nu=0}^n a_\nu(x) g_{n-\nu}\left(\frac{x}{\eta}\right) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(b_n(x) + h_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n.$$

D'après (3.7), utilisé sous la forme

$$a(x)g\left(\frac{x}{\eta}\right) = \sum_{l=0}^{m-1} (a_l(\mathbf{T}^l g) + g_l(\mathbf{S}^l a))(x, \eta)\eta^l + (\mathbf{S}^m a)(\mathbf{T}^m g)(x, \eta)\eta^m,$$

il reste à majorer $\sum_{\nu+l+m=N} (\mathbf{S}^m a_\nu)(\mathbf{T}^m g_l)(x, \eta)$ ce qui est analogue au cas du produit de séries formelles Gevrey traité dans la partie 4.1. On obtient enfin comme désiré

$$\left| (y \cdot z)(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(b_n(x) + h_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \right| \leq K_p C^2 L_1^N \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right) |\eta|^N$$

avec la constante K_p indiquée dans (4.6). \square

Le résultat concernant les quotients de DAC Gevrey et sa preuve sont identiques au corollaire 3.14 et à sa preuve concernant les DAC « ordinaires » en ajoutant « Gevrey » au mot DAC. Il suffit d'utiliser le théorème 5.7 (b) de la partie 5.6 au lieu de la proposition 3.5 (b) pour obtenir le DAC de la composée d'un DAC par l'inversion.

L'analogue de la proposition 3.10 pour l'asymptotique Gevrey est aussi vrai.

Proposition 4.4 . Soit $a_n(x) = \sum_{m \geq 0} a_{nm} x^m \in \mathcal{H}(r_0)$ et $g_n(X) \sim$

$\sum_{m > 0} g_{nm} X^{-m} \in \mathcal{G}(V)$. Supposons que

$$y(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$$

quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$ au sens de la définition 3.4. Alors, pour tout $r > 0$, on a

$$y(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n \geq 0} c_n(x) \eta^n \quad \text{quand } S_2 \ni \eta \rightarrow 0$$

uniformément par rapport à x sur l'ensemble des $x \in S(\alpha_1, \beta_1, r_0)$ tels que $|x| > r$, avec $c_n(x) = a_n(x) + \sum_{0 \leq l \leq n-1} g_{l, n-l} x^{l-n}$.

De même, étant donnés une partie compacte K de V et $\alpha_3, \beta_3, \eta_3$ tels que $X \in K$ et $\eta \in S(\alpha_3, \beta_3, \eta_3)$ impliquent $\eta \in S_2$ et $\eta X \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$, on a

$$y(\eta X, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} h_n(X) \eta^n \quad \text{quand } S(\alpha_3, \beta_3, \eta_3) \ni \eta \rightarrow 0$$

uniformément pour $X \in K$, où $h_n(X) = \sum_{0 \leq l \leq n} a_{n-l, l} X^l + g_n(X)$.

Preuve. On adapte la démonstration de la proposition 3.10 en donnant aux constantes des formes spécifiques à l'asymptotique Gevrey. D'après la définition, en particulier (4.1), on a $C_N = CL_1^N \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right)$ et $C_{lk} = CL_1^l L_2^k \Gamma\left(\frac{k+l}{p} + 1\right)$. On a aussi

$$\|a_k\| := \sup_{|x| < r_0} |a_k(x)| \leq CL_1^k \Gamma\left(\frac{k}{p} + 1\right).$$

Par ailleurs, en utilisant les inégalités de Cauchy, on a $|a_{kl}| \leq \|a_k\| |r_0|^{-l}$. La fonction $b : x \mapsto a_k(x) - \sum_{l < n} a_{kl} x^l$ est donc bornée par $(n+1)\|a_k\|$ sur le disque $|x| < r_0$.

Ainsi, la fonction (analytique) $x \mapsto x^{-n} b(x)$ est bornée par $(n+1)\|a_k\| r^{-n}$ sur le cercle $|x| = r$ pour tout $r < r_0$. Par le principe du maximum, on en déduit que $|b(x)| \leq (n+1)\|a_k\| r_0^{-n}$. En résumé, on peut choisir $A_{kn} = CL_1^k \Gamma\left(\frac{k}{p} + 1\right) (n+1) r_0^{-n}$ dans (3.16).

Pour le développement extérieur, il suffit donc de majorer dans (3.19)

$$C_N + \sum_{l < N} C_{l, N-l} r^{l-N} \leq C \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right) \sum_{l \leq N} L_1^l L_2^{N-l} r^{l-N} \leq C (L_1 + \frac{L_2}{r})^N \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right).$$

Pour le développement intérieur, on majore dans (3.20) en utilisant (4.2)

$$\begin{aligned} C_N + \sum_{k < N} A_{k, N-k} R^{N-k} &\leq C \sum_{k \leq N} L_1^k \Gamma\left(\frac{k}{p} + 1\right) (N-k+1) \left(\frac{R}{r_0}\right)^{N-k} \\ &\leq \tilde{C} L_1^N \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

avec

$$\tilde{C} = C \sum_{\nu \geq 0} (\nu+1) \left(\frac{R}{r_0 L_1}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{\nu}{p} + 1\right). \quad (4.10) \quad \square$$

En relation avec la remarque 2 qui suit la proposition 3.10, nous n'avons pas trouvé d'estimation Gevrey utile pour $|x| > |\eta|^\kappa$ ou $|X| < |\eta|^{-\kappa}$, $\kappa \in]0, 1[$. Nous n'avons pas non plus d'analogue Gevrey de la proposition 3.11. En revanche, de tels analogues Gevrey existent pour les proposition 3.12 et 3.13 : sous des conditions similaires sur les développements intérieurs, resp. extérieurs, le domaine de validité d'un DAC Gevrey peut être étendu.

Proposition 4.5 . Soit y une fonction définie pour $\eta \in S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ et $x \in V_1(\eta) = V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$ et ayant un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ au sens de définition 4.3 :

$$y(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$$

quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V_1(\eta)$, avec $a_n \in \mathcal{H}(r_0)$ et $g_n \in \mathcal{G}(V)$, $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ tels que $\alpha \leq \alpha_1 - \beta_2 < \beta_1 - \alpha_2 \leq \beta$.

Soit $\nu > \mu$. Dans le cas où $\nu > |\mu|$, on pose $\Omega = D(0, \nu)$, sinon on pose $\Omega = V(\alpha, \beta, -\mu + \gamma, \nu)$ avec $\gamma > 0$ arbitrairement petit.

On suppose que la fonction $Y : (X, \eta) \mapsto y(\eta X, \eta)$ peut être prolongée analytiquement sur $\Omega \times S_2$ et qu'elle admet un développement asymptotique Gevrey

$$Y(X, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} h_n(X) \eta^n$$

quand η tend vers 0, uniformément sur Ω .

Alors y peut être prolongée analytiquement sur l'ensemble des (x, η) avec $\eta \in S_2$ et avec $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \nu |\eta|)$ et y admet un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ quand $\eta \rightarrow 0$.

Preuve. Avec les notations des preuves précédentes, il s'agit d'une part de donner une majoration Gevrey à $R_N(x, \eta)$ donné par (3.11), pour x dans $\tilde{V}_1(\eta) \setminus V_1(\eta)$, $\tilde{V}_1(\eta) = V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \nu |\eta|)$ et d'autre part de montrer que les fonctions g_n peuvent être prolongées analytiquement et ont des développements Gevrey compatibles pour $X \in V(\alpha_1 - \beta_2, \beta_1 - \alpha_2, \infty, \nu)$.

On majore R_N en partant de (3.27) et en procédant comme pour (4.9). Par hypothèse, on peut choisir D_N de la forme $D_N = CL_1^N \Gamma(\frac{N}{p} + 1)$. Avec la même constante $A_{kn} = CL_1^k \Gamma(\frac{k}{p} + 1)(n+1)r_0^{-n}$ que précédemment, l'inégalité (3.16) est valide pour $|x| < r_0$, d'où

$$|R_N(x, \eta)| \leq \left(D_N + \sum_{k < N} A_{k, N-k} M^{N-k} \right) |\eta|^N \leq \tilde{C} L_1^N \Gamma(\frac{N}{p} + 1)$$

avec \tilde{C} donné par (4.10) et $M = \sup\{|x|; x \in \Omega\}$.

Pour le caractère Gevrey compatible des fonctions g_n , on utilise la remarque 4.2. Par hypothèse la série formelle $\sum_{n \geq 0} h_n(X) \eta^n$ est Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ sur Ω , i.e. il existe des constantes H, L_1 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{|X| \in \Omega} |h_n(X)| \leq H L_1^n \Gamma(\frac{n}{p} + 1). \quad (4.11)$$

Par définition d'un DAC Gevrey, la série formelle $\sum a_k(x) \eta^k$ est aussi Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$; en diminuant au besoin L_1 , on en déduit qu'il existe une constante A telle que

$\sup_{|x| < r_0} |a_k(x)| \leq A L_1^k \Gamma(\frac{k}{p} + 1)$ pour tout k . Ceci implique par les inégalités de Cauchy

que les coefficients de Taylor des a_k satisfont $|a_{kl}| \leq A L_1^k \Gamma(\frac{k}{p} + 1) r_0^{-l}$. Utilisons maintenant la formule $h_n(X) = \sum_{0 \leq l \leq n} a_{n-l, l} X^l + g_n(X)$ de la proposition 3.10. Elle

implique en utilisant (4.2) que

$$|g_n(X)| \leq H L_1^n \Gamma(\frac{n}{p} + 1) + \sum_{0 \leq l \leq n} A L_1^{n-l} \Gamma(\frac{n-l}{p} + 1) r_0^{-l} M^l \leq \tilde{C} L_1^n \Gamma(\frac{n}{p} + 1)$$

avec $\tilde{C} = H + \sum_{l \geq 0} \left(\frac{M}{L_1 r_0} \right)^l \frac{1}{\Gamma(\frac{l}{p} + 1)}$ pour $X \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$. Les g_n satisfont donc (4.4) pour $X \in \Omega$, et aussi pour $X \in V$ par hypothèse, donc pour $X \in V(\alpha_1 - \beta_2, \beta_1 - \alpha_2, \infty, \nu)$. Enfin (4.5) est aussi satisfait par hypothèse. Les hypothèses de la remarque 4.2 sont donc satisfaites et on peut conclure. \square

Proposition 4.6 . Soit $0 < r_0 < \tilde{r}_0$ et soit y une fonction définie pour $\eta \in S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ et $x \in V_1(\eta) = V(\alpha_1, \beta_1, \tilde{r}_0, \mu |\eta|)$. On suppose que $y(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n(\frac{x}{\eta}) \right) \eta^n$, quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V_1(\eta) = V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu |\eta|)$, au sens de la définition 4.3.

On suppose de plus qu'il existe $\gamma > 0$ tel que y admet un développement asymptotique Gevrey $y(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) \eta^n$ quand η tend vers 0, uniformément pour $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0 - \gamma, \tilde{r}_0)$.

Alors (4.8) est satisfait pour tout $\eta \in S_2$ et tout $x \in \tilde{V}_1(\eta)$.

REMARQUE . De même que pour la proposition 3.13, nous dirons par abus de langage que y a un DAC Gevrey pour $\eta \in S_2$ et $x \in V_1(\eta)$, même si les fonctions a_n ne sont pas définies sur $D(0, r_0)$ en entier.

Preuve. D'après la proposition 3.13, les fonctions a_n peuvent être prolongées analytiquement sur l'union de $D(0, r_0) \cup V(\alpha_1, \beta_1, r_0 - \gamma, \tilde{r}_0)$. Il faut encore vérifier (4.8) pour $x \in V_1(\eta)$ avec $|x| \geq r_0$, i.e. majorer R_N donné par (3.28). D'après (4.1), il existe C, L_1, L_2 tels que pour tout $l < N \in \mathbb{N}$

$$|r_{l, N-l}(X)| \leq C L_1^l L_2^{N-l} \Gamma(\frac{N}{p} + 1) |X|^{-N+l}.$$

Quitte à augmenter les constantes C et L_1 , on a par hypothèse

$$\left| y(x, \eta) - \sum_{n < N} c_n(x) \eta^n \right| \leq C L_1^N \Gamma(\frac{N}{p} + 1) |\eta|^N.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |R_N(x, \eta)| &\leq C \left(L_1^N + \sum_{0 \leq l < N} L_1^l L_2^{N-l} r_0^{l-N} \right) \Gamma(\frac{N}{p} + 1) |\eta|^N \\ &\leq C \left(L_1 + \frac{L_2}{r_0} \right)^N \Gamma(\frac{N}{p} + 1) |\eta|^N. \end{aligned}$$

\square

4.3 Fonctions plates Gevrey.

Comme pour les développements asymptotiques classiques, les fonctions plates sont particulièrement intéressantes. Ici, on peut définir deux notions de platitude, suivant que l'on demande aux fonctions a_n et g_n d'être identiquement nulles, ou seulement à leurs coefficients a_{nm} et g_{nm} . Une fonction analytique étant déterminée par les coefficients de sa série de Taylor, la situation pour les g_n et pour les a_n n'est pas symétrique.

Définition 4.7 . Avec les notations de la définition 4.3, on dit qu'une fonction $y(x, \eta)$ est *plate au sens fort* si elle admet un DAC et si toutes les fonctions a_n et g_n de la série formelle correspondante sont identiquement nulles. On dit qu'elle est *plate au sens faible* si elle a un DAC et si toutes les fonctions a_n sont nulles et tous les coefficients g_{nm} des développements asymptotiques (4.1) des fonctions g_n s'annulent.

Un des points clés de la théorie classique des développements asymptotiques Gevrey est la relation entre les fonctions plates Gevrey et les fonctions exponentiellement petites.

Proposition 4.8 . *Soit y une fonction définie et analytique lorsque $\eta \in S_2$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu |\eta|)$.*

(a) *Si y est plate au sens fort, alors il existe $A, C > 0$ tels que*

$$|y(x, \eta)| \leq C \exp(-A/|\eta|^p) \quad (4.12)$$

pour $\eta \in S_2$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu |\eta|)$.

Réciproquement, si y satisfait (4.12), alors y est plate au sens fort.

(b) *Si y est plate au sens faible, alors il existe $B, C > 0$ tels que*

$$|y(x, \eta)| \leq C \exp(-B|x|^p/|\eta|^p) \quad (4.13)$$

pour $\eta \in S_2$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu |\eta|)$.

Réciproquement, si une fonction y satisfait (4.13), et si de plus y admet un DAC, alors y est plate au sens faible.

REMARQUE . L'hypothèse que y admette un DAC est indispensable pour la réciproque du sens faible, comme le montre par exemple la fonction $y(x, \eta) = \eta^{1/2} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^p\right\}$.

Preuve. Le (a) est classique. On a pour tout N la majoration

$$|y(x, \eta)| \leq CL_1^N \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right) |\eta|^N. \quad (4.14)$$

Il suffit de choisir N proche de sa valeur optimale $N \sim p\left(\frac{1}{|\eta|L_1}\right)^p$ pour obtenir la majoration avec $A = \frac{1}{L_1}$.

Réciproquement, une fonction satisfaisant (4.12) satisfait (4.14) pour tout $L_1 > \frac{1}{A}$.

(b) Comme y est bornée d'après la définition 4.3, il suffit de montrer l'inégalité quand $x \in V_1(\eta) = V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu |\eta|)$ satisfait $|x| \geq K|\eta|$, où $K > 0$ est assez grand. Quitte à agrandir L_2 , on peut supposer que $r_0 + \mu\eta_0 \leq L_2/L_1$ et donc $|x| \leq L_2/L_1$ pour tout $x \in V_1(\eta)$.

D'après l'hypothèse, on a pour tout entier positif N

$$|y(x, \eta)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left|g_n\left(\frac{x}{\eta}\right)\right| |\eta|^n + C(L_1 |\eta|)^N \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right)$$

et, pour tout n et pour tout M entier positif (cf. (4.1))

$$\left|g_n\left(\frac{x}{\eta}\right)\right| |\eta|^n \leq CL_1^n (L_2/|x|)^M |\eta|^{M+n} \Gamma\left(\frac{M+n}{p} + 1\right).$$

L'inégalité $L_1 \leq L_2/|x|$ et le choix de $M + n = N$ mènent à

$$|y(x, \eta)| \leq C(N+1)(L_2 |\eta/x|)^N \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right)$$

pour tout entier positif N . En choisissant N proche de sa valeur optimale $N \sim p\left(\frac{|x|}{|\eta|L_2}\right)^p$ (ici on utilise que $|x| \geq K|\eta|$ avec K assez grand) on obtient l'existence d'une constante \tilde{C} telle que $|y(x, \eta)| \leq \tilde{C} \left|\frac{x}{\eta}\right|^p \exp\left(-\frac{|x|^p}{|\eta|^p L_2^p}\right)$. Ceci implique l'énoncé pour tout $0 < B < L_2^{-p}$.

Réciproquement, si y admet un DAC et satisfait (4.13), alors non seulement la partie lente de son DAC est nulle, mais aussi son développement extérieur. La première partie de la proposition 3.10 montre que les fonctions de sa partie rapide ont aussi un développement asymptotique nul, c.f. (3.14). \square

Dans le cadre des DAC, nous avons aussi un équivalent du lemme de Watson classique : si une fonction est plate sur des secteurs en η et en x suffisamment grands, alors c'est la fonction nulle.

Proposition 4.9 . *Soit $\eta_0, r_0, \mu > 0$, $\omega > \psi + \pi/p$ et $\delta > \gamma + \pi/p$. On note*

$$\mathcal{D} = \{(x, \eta) ; \eta \in S(\psi, \omega, \eta_0), x \in V(\gamma + \arg \eta, \delta + \arg \eta, r_0, \mu |\eta|)\}.$$

Soit $y(x, \eta)$ une fonction holomorphe définie sur \mathcal{D} telle que, pour tous $\psi \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \omega$ et $\alpha_1 < \beta_1$ satisfaisant $\gamma + \beta_2 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \delta + \alpha_2$, ses restrictions à $\eta \in S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ et à $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu |\eta|)$ ont un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ plat au sens faible. Alors y est la fonction 0.

Preuve. D'après la proposition précédente, il existe des constantes $C, B > 0$ telles que la fonction y satisfait $|y(x, \eta)| \leq Ce^{-B|x|^p/|\eta|^p}$ pour tout $(x, \eta) \in \mathcal{D}$. A priori, les constantes dépendent des domaines choisis pour les restrictions, mais comme on peut couvrir \mathcal{D} par un nombre fini de tels domaines, il suffit de prendre le maximum des majorations.

Dans la suite, on peut supposer sans perte que $\delta - \gamma > \omega - \psi$. On prend $\alpha_2 = \psi$, $\beta_2 = \omega$, $\alpha_1 = \gamma + \omega$ et $\beta_1 = \delta + \psi$; la restriction \tilde{y} de y à $\eta \in S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$, $x \in S(\alpha_1, \beta_1, r_0)$ satisfait donc $|\tilde{y}(x, \eta)| \leq Ce^{-B|x|^p/|\eta|^p}$. Pour tout $x \in S(\alpha_1, \beta_1, r_0)$ fixé, cette fonction est holomorphe et exponentiellement petite sur le secteur $S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ d'angle d'ouverture $> \pi/p$. D'après le lemme de Watson classique, on a donc $\tilde{y} = 0$. Le théorème d'identité des fonctions holomorphes implique donc l'énoncé de la proposition. \square

Étant donnés une série formelle $\sum a_n(x)\eta^n$ Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ et des coefficients g_{nm} satisfaisant la condition nécessaire (4.3), il existe donc au plus une fonction sur un domaine \mathcal{D} tel que décrit dans la proposition 4.9 ayant un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ correspondant à ces données. Dans une théorie de la resommation des DAC qui reste à faire, une telle fonction, si elle existe, pourrait donc être appelée la *somme* de la série doublement formelle $\sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + \hat{g}_n\left(\frac{x}{\eta}\right)\right) \eta^n$, $\hat{g}_n(X) = \sum g_{nm} X^{-m}$ sur \mathcal{D} .

4.4 Théorèmes de type Borel-Ritt.

De même que dans la théorie classique de l'asymptotique Gevrey, il nous sera utile de construire des fonctions ayant un DAC Gevrey prescrit. Comme dans la théorie classique, ce ne sera possible que si la taille des secteurs est inférieure à π/p . Nous présentons deux résultats de ce type. Dans le premier, le lemme 4.10, les fonctions a_n, g_n sont données. Dans le deuxième, le corollaire 4.12, ce sont les fonctions a_n et les coefficients g_{nm} des fonctions g_n qui sont donnés.

Lemme 4.10 . Soit $r_0 > 0$, soit $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $\alpha_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_2$ et $\alpha \leq \alpha_1 - \beta_2 < \beta_1 - \alpha_2 \leq \beta$. Soit $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ un quasi-secteur infini et $S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ un secteur fini. Enfin soit

$$\hat{y}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \in \hat{\mathcal{C}}(r_0, V)$$

une série formelle combinée Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ selon la définition 4.1.

On suppose que $\beta_2 - \alpha_2 < \pi/p$.

Alors il existe une fonction holomorphe y définie pour $\eta \in S_2$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu |\eta|)$ qui admet \hat{y} comme DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$.

REMARQUE. La preuve montre que, si \hat{y} a pour type (L_1, L_2) , alors il existe y ayant \hat{y} pour DAC de type \tilde{L}_1 pour tout $\tilde{L}_1 > \frac{L_1}{\cos(p\psi)}$, avec $\psi = \frac{1}{2}(\beta_2 - \alpha_2)$.

Preuve. D'après l'hypothèse, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{|x| < r_0} |a_n(x)| \leq CL_1^n \Gamma(\frac{n}{p} + 1)$

et aussi $\sup_{|x| < r_0} |g_n(x)| \leq CL_1^n \Gamma(\frac{n}{p} + 1)$.

Nous rappelons d'abord le théorème de Borel-Ritt-Gevrey, i.e. la construction classique d'une fonction ayant un développement asymptotique Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$

prescrit. Étant donnée une série $\hat{a}(x, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \eta^n$ Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ et de type

L_1 , on pose $\check{a}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \frac{1}{\Gamma}(\frac{n}{p} + 1) t^n$; elle est appelée la transformée de Borel

formelle de $\hat{a}(x, \varepsilon)$. Nous l'avons un peu modifiée par rapport aux présentations les plus répandues : nous n'avons pas introduit de décalage, car cela simplifie notre présentation. Cette série a un rayon de convergence au moins $1/L_1$. Soit $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_2)$, $\psi = \frac{1}{2}(\beta_2 - \alpha_2)$, $0 < \rho < 1/L_1$ et $T = \rho e^{i\varphi}$. À présent on pose

$$\tilde{a}(x, \eta) = \mathcal{L}_{T,p}(\check{a})(x, \eta) := \eta^{-p} \int_0^T e^{-t^p/\eta^p} \check{a}(x, t) d(t^p) ; \quad (4.15)$$

elle est appelée la transformée de Laplace tronquée de \check{a} (elle aussi un peu modifiée). Remarquons, qu'elle est définie pour tout $\eta \in \mathbb{C}^*$ et $x \in D(0, r_0)$. Les transformations de Borel formelle et de Laplace tronquée sont importantes en théorie Gevrey

car elles transforment une série formelle Gevrey en une fonction l'admettant comme développement asymptotique Gevrey. Ceci est basé sur la formule suivante.

$$\mathcal{L}_{\infty e^{i\varphi}, p}(t^n) = \Gamma(\frac{n}{p} + 1) \eta^n \text{ quand } |\arg \eta - \varphi| < \frac{\pi}{p}.$$

Pour montrer que $\tilde{a}(x, \eta)$ admet $\hat{a}(x, \eta)$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$, on écrit pour un N donné $\check{a}(x, t) = P_N(x, t) + r_N(x, t)$, où

$$P_N(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n(x) \frac{1}{\Gamma}(\frac{n}{p} + 1) t^n \text{ et } r_N(x, t) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n(x) \frac{1}{\Gamma}(\frac{n}{p} + 1) t^n.$$

Alors pour $\eta \in S_2$ et pour $|x| \leq r_0$, on a

$$\tilde{a}(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n(x) \eta^n = -I + J$$

avec $I = \eta^{-p} \int_T^{\infty e^{i\varphi}} e^{-t^p/\eta^p} P_N(x, t) d(t^p)$ et $J = \eta^{-p} \int_0^T e^{-t^p/\eta^p} r_N(x, t) d(t^p)$.

Puisque

$$|P_N(x, t)| \leq \rho^{-N} |t|^N C \sum_{n=0}^{N-1} (L_1 \rho)^n \text{ quand } |t| \geq \rho,$$

on a d'abord, avec la constante $K = \frac{C}{1 - L_1 \rho}$,

$$\begin{aligned} |I| &\leq K |\eta|^{-p} \rho^{-N} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{s^p \cos(p\psi)}{|\eta|^p}\right) s^N d(s^p) \\ &= \frac{K}{\cos(p\psi)} (\rho \cos(p\psi)^{1/p})^{-N} \Gamma(\frac{N}{p} + 1) |\eta|^N. \end{aligned}$$

Avec la même constante K , on a l'inégalité $|r_N(x, t)| \leq K \rho^{-N} |t|^N$ quand $t \in [0, T]$. On obtient donc de manière analogue

$$\begin{aligned} |J| &\leq K |\eta|^{-p} \int_0^\rho \exp\left(-\frac{s^p \cos(p\psi)}{|\eta|^p}\right) \rho^{-N} s^N d(s^p) \\ &\leq \frac{K}{\cos(p\psi)} (\rho (\cos(p\psi))^{1/p})^{-N} \Gamma(\frac{N}{p} + 1) |\eta|^N. \end{aligned}$$

Ceci démontre $\left| \tilde{a}(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n(x) \eta^n \right| \leq \tilde{C} \tilde{L}^N \Gamma(\frac{N}{p} + 1) |\eta|^N$ avec les constantes $\tilde{C} = \frac{2K}{\cos(p\psi)} = \frac{2C}{(1 - L_1 \rho) \cos(p\psi)}$ et $\tilde{L} = (\rho (\cos(p\psi))^{1/p})^{-1}$, autrement dit l'asymptotique Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ de \tilde{a} , uniformément pour $x \in D(0, r_0)$.

De manière analogue, on construit $\tilde{g}(X, \eta)$ ayant $\hat{g} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(X) \eta^n$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ uniformément pour $X \in V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$. Comme fonction y ayant le DAC cherché, on peut alors choisir la fonction donnée par $y(x, \eta) = \tilde{a}(x, \eta) + \tilde{g}(\frac{x}{\eta}, \eta)$. \square

Concernant le deuxième résultat, où seuls les coefficients g_{nm} sont donnés avec la condition (4.3), il nous faut d'abord construire des fonctions $g_n(X)$ satisfaisant (4.1), ce que nous faisons dans l'énoncé ci-dessous.

Lemme 4.11 . Soit g_{nm} , $n, m \in \mathbb{N}$ des nombres complexes vérifiant (4.3). Soit $\alpha < \beta < \alpha + \pi/p$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors il existe $C', L'_1, L'_2 > 0$ et une suite de fonctions g_n définies sur $V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ telles que pour tout $X \in V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$

$$|X|^M \left| g_n(X) - \sum_{m=1}^{M-1} g_{nm} X^{-m} \right| \leq C' L'_1{}^n L'_2{}^M \Gamma\left(\frac{M+n}{p} + 1\right),$$

i.e. $\sum_{n \geq 0} g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^n$ est Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ au sens de la définition 4.1.

Corollaire 4.12 . Soit g_{nm} , $n, m \in \mathbb{N}$ des nombres complexes satisfaisant (4.3) et $a_n \in \mathcal{H}(r_0)$ des fonctions holomorphes telles qu'il existe des constantes C, L_1 avec $\sup_{|x| < r_0} |a_n(x)| \leq C L_1^n \Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\alpha < \beta < \alpha + \pi/p$, $\alpha_2 < \beta_2 < \alpha_2 + \pi/p$, $S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ un secteur fini, soit $\alpha_1 < \beta_1$ tels que $\alpha \leq \alpha_1 - \beta_2 < \beta_1 - \alpha_2 \leq \beta$ et soit $\mu \in \mathbb{R}$.

Alors il existe une suite de fonctions $(g_n^{\alpha, \beta})_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ satisfaisant (4.1) avec les coefficients g_{nm} donnés et une fonction holomorphe $y(x, \eta)$ définie quand $\eta \in S_2$ et $x \in V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu|\eta|)$ qui admet $\hat{y}(x, \eta) := \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n^{\alpha, \beta}\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$ comme DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$.

Le corollaire est une conséquence immédiate des deux lemmes précédents.

Preuve de lemme 4.11. Les séries $\hat{g}_n(X) = \sum_{m=n+1}^{\infty} g_{n, m-n} X^{-m}$ sont Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$; leurs coefficients satisfont précisément $|g_{n, m-n}| \leq C \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^n L_2^m \Gamma\left(\frac{m}{p} + 1\right)$ pour tout n, m . La méthode présentée dans la démonstration du lemme précédent s'applique à chaque \hat{g}_n , en remplaçant la variable η par X^{-1} et la constante C par $C \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^n$. Précisément, soit $T > |\mu|$ et soit $\rho \in]0, 1/L_2[$. Posons $c = \cos\left(\frac{p(\beta-\alpha)}{2}\right)$.

Alors on définit les fonctions \tilde{g}_n par

$$\tilde{g}_n(X) = X^p \int_0^T e^{-t^p X^p} \sum_{m=n+1}^{\infty} g_{n, m-n} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{p} + 1\right)} t^m d(t^p)$$

sur $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$. Pour tout $M \geq n$ et tout $X \in V$, $|X| \geq T$ on a d'après les majorations dans la preuve du lemme précédent

$$\left| \tilde{g}_n(X) - \sum_{m=n+1}^{M-1} g_{n, m-n} X^{-m} \right| \leq \frac{2C}{(1-L_2\rho)c} \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^n (\rho c^{1/p})^{-M} \Gamma\left(\frac{M}{p} + 1\right) |X|^{-M}.$$

En posant

$$\tilde{C} = \frac{2C}{(1-L_2\rho)c}, \quad \tilde{\rho} = \rho c^{1/p}, \quad (4.16)$$

en remplaçant M par $M+n$ et en multipliant par $|X|^n$, ceci implique que les fonctions $g_n : X \mapsto \tilde{g}_n(X) X^n$ satisfont

$$\left| g_n(X) - \sum_{m=1}^{M-1} g_{nm} X^{-m} \right| \leq \tilde{C} \left(\frac{L_1}{L_2 \tilde{\rho}}\right)^n \tilde{\rho}^{-M} \Gamma\left(\frac{M+n}{p} + 1\right) |X|^{-M},$$

i.e. (4.5) est satisfaite pour $|X| > T$ (avec les constantes \tilde{C} de (4.16), $\tilde{L}_1 = \frac{L_1}{L_2 \tilde{\rho}}$ et $\tilde{L}_2 = \frac{1}{\tilde{\rho}}$ au lieu de C, L_1 et L_2).

D'après la remarque 4.2, il reste à majorer $g_n(X)$ pour $X \in V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$, $|X| \leq T$. Une majoration analogue à celle de J dans la démonstration précédente montre que

$$\begin{aligned} |\tilde{g}_n(X)| &\leq |X|^p \int_0^T \exp(s^p |X|^p) \frac{2C}{1-L_2\rho} \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^n \left(\frac{s}{\rho}\right)^n d(s^p) \\ &\leq \tilde{C} \exp(\rho^p T^p) \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^n, \end{aligned}$$

où \tilde{C} est la constante définie dans (4.16). On a donc $|g_n(X)| \leq \tilde{C} \exp(\rho^p T^p) \left(\frac{L_1 T}{L_2}\right)^n$ pour $|X| \leq T$. Ceci implique enfin (4.4) et complète ainsi la démonstration du lemme. \square

4.5 Bons recouvrements cohérents.

À présent, nous allons utiliser les résultats de la partie 4.4 pour associer, à une fonction $y(x, \eta)$ ayant un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$, des fonctions définies sur d'autres secteurs dans la variable η et d'autres quasi-secteurs en x ayant des DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ de telle manière que, d'une part les séries formelles $\sum_n a_n(x) \eta^n$ et $\sum_n \hat{g}_n(X) \eta^n$ soient les mêmes pour toutes ces fonctions et d'autre part l'union des domaines de définition contienne l'ensemble des (x, η) tels que $|\eta| < \eta_0$ et $-\mu|\eta| < |x| < r_0$. Si $\mu > 0$, cette union est donc simplement $D(0, \eta_0)^* \times D(0, r_0)$. D'après la proposition 4.8, les différences de ces fonctions sont donc exponentiellement petites.

Soit $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ un quasi-secteur infini, soit $S = S(\psi, \omega, \eta_0)$ un secteur fini avec $0 < \omega - \psi < \beta - \alpha$, soit $\kappa < \lambda$ tels que $\alpha < \kappa - \omega < \lambda - \psi < \beta$ et soit $y(x, \eta)$ une fonction holomorphe définie quand $\eta \in S$ et $x \in V(\kappa, \lambda, r_0, \mu|\eta|)$ telle que

$$y(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \text{ quand } S \ni \eta \rightarrow 0 \quad (4.17)$$

où g_0, g_1, \dots sont des fonctions de $\mathcal{G}(V)$ satisfaisant (4.1) avec des coefficients g_{nm} .

Pour associer une famille de fonctions à y , on construit d'abord leurs domaines de définition. D'abord, on choisit des secteurs infinis $V^j = V(\alpha^j, \beta^j, \infty, \mu)$, $j = 2, \dots, J$, où J est un entier supérieur ou égal à 2, tels que leurs

angles d'ouverture soient inférieurs à π/p et tels qu'en les complétant par $V^1 := V$, ils forment un *bon recouvrement* de \mathbb{C} si $\mu > 0$, ou de la couronne infini $C(|\mu|, \infty) = \{X \in \mathbb{C} \mid |\mu| < |X| < \infty\}$ si $\mu \leq 0$. Ceci veut dire qu'on a $\bigcup_{j=1}^J V^j = \mathbb{C}$, resp. $C(|\mu|, \infty)$, ainsi que $V^j \cap V^m$ borné si $j \notin \{m-1, m, m+1\}$, i.e. $\alpha^j < \beta^{j-1} < \alpha^{j+1}$ (par convention on pose $V^{J+1} = V^1$ et $V^0 = V^J$, autrement dit les indices supérieurs sont pris mod J). Pour avoir de grands angles d'ouverture pour les quasi-secteurs en x , il

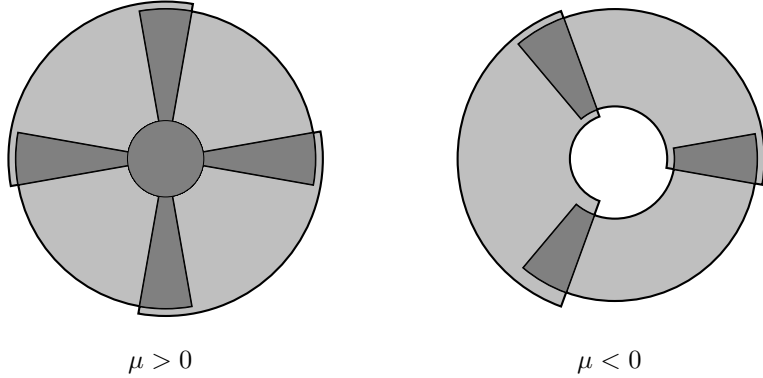


FIGURE 4.1 – Exemples de recouvrements par des quasi-secteurs $(V_l^j(\eta))_{0 < j \leq J}$ pour l fixé. Les rayons ont été choisis un peu différents pour que les figures soient plus lisibles.

convient de choisir de petits secteurs en η , pour que $X = x/\eta$ soit encore dans les V^j ; *a priori* le secteur donné S ne sera donc pas inclus dans cette famille. Soit $\delta > 0$ strictement inférieur au minimum des demi-angles d'ouverture des intersections $V^j \cap V^{j+1}$, i.e. $2\delta < \min\{\beta^j - \alpha^{j+1}, j = 1, \dots, J\}$ (avec la convention $\beta^J - \alpha^{J+1} = \beta^J - \alpha^1 - 2\pi$). On choisit ensuite une famille de secteurs finis $S_l = S(\alpha_l, \beta_l, \eta_0)$, $l = 1, \dots, L$ tels qu'ils forment un *bon recouvrement* du disque épointé $D(0, \eta_0)^*$, i.e. leur union est $D(0, \eta_0)^*$ et $S_l \cap S_m = \emptyset$ si $l \notin \{m-1, m, m+1\}$, et tels que les angles d'ouverture satisfassent $\beta_l - \alpha_l \leq \delta$. On prend ici et dans la suite les indices du bas mod L . On pose $\varphi_l = (\alpha_l + \beta_l)/2$ les directions bissectrices des secteurs S_l . Enfin, on choisit les quasi-secteurs $V_l^j(\eta) = V(\alpha_l^j, \beta_l^j, r_0, \mu|\eta|)$ avec $\alpha_l^j := \alpha^j + \varphi_l + \delta$ et $\beta_l^j := \beta^j + \varphi_l - \delta$. On vérifie facilement que, pour tout $\eta \in S_l$, les familles des $V_l^j(\eta)$, $j = 1, \dots, J$ forment un bon recouvrement de $D(0, r_0)$ si $\mu > 0$, de la couronne $C(-\mu|\eta|, r_0)$ si $\mu \leq 0$, et que $\eta \in S_l$ et $x \in V_l^j(\eta)$ impliquent $x/\eta \in V^j$.

En résumé, la collection des $V^j, S_l, V_l^j(\eta)$ construits est un *bon recouvrement cohérent* au sens de la définition suivante. Pour pouvoir combiner les cas μ positif et μ négatif, on utilise $C(\sigma, \rho) = \{x \in \mathbb{C} \mid \sigma < |x| < \rho\}$ pour

$\rho > 0, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma < \rho$.

Définition 4.13. On appelle la collection des $V^j, S_l, V_l^j(\eta)$, $j = 1, \dots, J$, $l = 1, \dots, L$ un *bon recouvrement cohérent* si $V^j = V(\alpha^j, \beta^j, \infty, \mu)$, $j = 1, \dots, J$, forment un bon recouvrement de $C(-\mu, \infty)$, si $S_l = S(\alpha_l, \beta_l, \eta_0)$, $l = 1, \dots, L$, forment un bon recouvrement de $D(0, \eta_0)^*$, s'il existe δ tel que

$$\max\{\beta_l - \alpha_l, l = 1, \dots, L\} \leq \delta < \frac{1}{2} \min\{\beta^1 - \alpha^2, \dots, \beta^{J-1} - \alpha^J, \beta^J - \alpha^1 - 2\pi\}$$

et si $V_l^j(\eta) = V(\alpha_l^j, \beta_l^j, r_0, \mu|\eta|)$ avec $\alpha_l^j = \alpha^j + \varphi_l + \delta$ et $\beta_l^j = \beta^j + \varphi_l - \delta$, où $\varphi_l = (\alpha_l + \beta_l)/2$. On appelle le nombre $\max(\beta_l - \alpha_l, l = 1, \dots, L)$ la *finesse* du recouvrement.

Le lemme 4.10 établit l'existence de fonctions y_l^1 holomorphes quand $\eta \in S_l$ et $x \in V_l^1(\eta)$ telles que $y_l^1(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x) + g_n(\frac{x}{\eta}))\eta^n$ avec les fonctions $a_n(x)$ et $g_n(X)$ de (4.17). De plus, quitte à diminuer au besoin μ et η_0 , le corollaire 4.12 implique l'existence de suites de fonctions $(g_n^j(X))_{n \in \mathbb{N}}$, $j = 2, \dots, J$, holomorphes sur V^j satisfaisant (4.1) avec les g_{nm} de (4.17) et certaines constantes C, L_1, L_2 et des fonctions $y_l^j(x, \eta)$ holomorphes sur l'ensemble des $\eta \in S_l, x \in V_l^j(\eta)$ telles que

$$y_l^j(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(x) + g_n^j\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n. \quad (4.18)$$

Pour compléter les g_n^j , on pose $g_n^1 = g_n$ pour tout n .

On a ainsi une famille y_l^j de fonctions définies sur un bon recouvrement cohérent ayant des DAC contenant les mêmes séries formelles que la fonction y donnée. La proposition 4.8 implique qu'il existe des constantes $A, B, C > 0$ telles que

$$\left| y_{l+1}^j(x, \eta) - y_l^j(x, \eta) \right| \leq C e^{-A/|\eta|^p}, \quad (4.19)$$

quand $j = 1, \dots, J, l = 1, \dots, L, \eta \in S_{l+1} \cap S_l, x \in V_{l+1}^j(\eta) \cap V_l^j(\eta)$,

$$\left| y_l^{j+1}(x, \eta) - y_l^j(x, \eta) \right| \leq C e^{-B|x|^p/|\eta|^p}, \quad (4.20)$$

quand $j = 1, \dots, J, l = 1, \dots, L, \eta \in S_l, x \in V_l^{j+1}(\eta) \cap V_l^j(\eta)$ ainsi que

$$\left| y_l^1(x, \eta) - y(x, \eta) \right| \leq C e^{-A/|\eta|^p}, \quad (4.21)$$

quand $l = 1, \dots, L, \eta \in S_l \cap S$, si cette intersection est non vide, et $x \in V_l^1(\eta) \cap V(\kappa, \lambda, r_0, \mu|\eta|)$. Nous avons ainsi démontré ce qui suit.

Proposition 4.14. Soit $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$ un quasi-secteur infini, soit $S = S(\psi, \omega, \eta_0)$ un secteur fini avec $\omega - \psi < \beta - \alpha$, soit $\kappa < \lambda$ tels que

$\alpha < \kappa - \omega < \lambda - \psi < \beta$ et soit $y(x, \eta)$ une fonction holomorphe définie quand $\eta \in S$ et $x \in V(\kappa, \lambda, r_0, \mu |\eta|)$ ayant un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$.

Alors il existe un bon recouvrement cohérent $V^j, S_l, V_l^j(\eta)$, $j = 1, \dots, J$, $l = 1, \dots, L$ et une famille de fonctions holomorphes bornées $y_l^j(x, \eta)$ définies quand $\eta \in S_l$ et $x \in V_l^j(\eta)$ telle que les différences des fonctions sont exponentiellement petites, i.e. il existe des constantes $A, B, C > 0$ telles que (4.19–4.21) sont satisfaites.

Le partie suivante est consacrée à la démonstration d'une réciproque de cette proposition.

5 Un théorème de type Ramis-Sibuya.

Nous présentons ici un résultat clé de ce mémoire : des fonctions y_l^j définies et analytiques sur un bon recouvrement cohérent au sens de la définition 4.13 et satisfaisant (4.19, 4.20) ont des DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ avec les mêmes séries formelles $\sum_n a_n(x)\eta^n$ et $\sum_n \hat{g}_n(X)\eta^n$. Le résultat est présenté pour μ positif ou négatif, mais pour simplifier l'exposition, les sections 5.2, 5.3 et 5.4, qui détaillent les parties lentes et rapides de ces DAC ne concernent que μ positif. Les modifications à apporter pour μ négatif sont présentées dans la section 5.5. Dans la dernière section 5.6, nous utilisons ce résultat pour montrer la stabilité des DAC Gevrey par composition avec une fonction analytique.

5.1 Énoncé du théorème et début de la preuve.

Théorème 5.1 . Soit J, L deux entiers naturels non nuls, μ un nombre réel positif ou négatif, et soit $V^j = V(\alpha^j, \beta^j, \infty, \mu)$, $S_l = S(\alpha_l, \beta_l, \eta_0)$, $V_l^j(\eta) = V(\alpha_l^j, \beta_l^j, r_0, \mu |\eta|)$, $j = 1, \dots, J$, $l = 1, \dots, L$, un bon recouvrement cohérent de finesse δ au sens de la définition 4.13. Soit $\tilde{r}_0 > r_0$ et $\tilde{\mu} > \mu$. On pose $\tilde{V}_l^j(\eta) = V(\alpha_l^j - 2\delta, \beta_l^j + 2\delta, \tilde{r}_0, \tilde{\mu} |\eta|)$. On suppose qu'il existe des fonctions holomorphes bornées $y_l^j(x, \eta)$ définies quand $\eta \in S_l$ et $x \in \tilde{V}_l^j(\eta)$ et des constantes A, B, C positives telles que les différences satisfont les majorations suivantes :

$$|y_{l+1}^j(x, \eta) - y_l^j(x, \eta)| \leq C \exp\left(-\frac{A}{|\eta|^p}\right) \quad (5.1)$$

si $\eta \in S_l \cap S_{l+1}$ et $x \in \tilde{V}_l^j(\eta) \cap \tilde{V}_{l+1}^j(\eta)$ et

$$|y_l^{j+1}(x, \eta) - y_l^j(x, \eta)| \leq C \exp\left(-B \left|\frac{x}{\eta}\right|^p\right) \quad (5.2)$$

si $\eta \in S_l$ et $x \in \tilde{V}_l^j(\eta) \cap \tilde{V}_l^{j+1}(\eta)$. Alors les restrictions des fonctions y_l^j sur l'ensemble des (x, η) tels que $\eta \in S_l$, $x \in V_l^j(\eta)$ admettent un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ au sens de la définition 4.3.

Précisément, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathcal{H}(r_0)$, pour chaque $j = 1, \dots, J$ une suite $(g_n^j)_{n \in \mathbb{N}}$, $g_n^j \in \mathcal{G}(V^j)$ et une constante \tilde{C} telles que pour tout couple d'indices (j, l) , tout $\eta \in S_l$, tout $x \in V_l^j(\eta)$, et tout entier $N > 0$

$$\left| y_l^j(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_n(x) + g_n^j\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \right| \leq \tilde{C} \tilde{A}^{-N/p} \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right) |\eta|^N ; \quad (5.3)$$

ici et dans la suite, on a posé $\tilde{A} = \min(A, Br_0^p)$ avec les constantes A, B de (5.1), (5.2). De plus, les suites de fonctions $(g_n^j)_{n \in \mathbb{N}}$, ont des développements asymptotiques Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ compatibles à l'infini de type $(\tilde{A}^{-1/p}, B^{-1/p})$ avec des coefficients indépendants de j , i.e. il existe une suite double $(g_{nm})_{n, m \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes et une constante \tilde{C} telles que pour tout $M, n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, J\}$ et tout $X \in V^j$

$$|X|^M \left| g_n^j(X) - \sum_{m=1}^{M-1} g_{nm} X^{-m} \right| \leq \tilde{C} \tilde{A}^{-n/p} B^{-M/p} \Gamma\left(\frac{M+n}{p} + 1\right). \quad (5.4)$$

REMARQUE . L'asymptotique des fonctions y_l^j ne peut être valide que dans des quasi-secteurs $V_l^j(\eta)$ d'angle d'ouverture plus petit que leurs quasi-secteurs de définition $\tilde{V}_l^j(\eta)$. En effet les fonctions g_n^j sont construites à partir des y_l^j , donc les quasi-secteurs V^j sur lesquels elles sont définies doivent déjà avoir un angle d'ouverture plus petit que les $\tilde{V}_l^j(\eta)$; ensuite la condition que les quotients x/η doivent être dans le domaine V^j de g_n^j entraîne que l'asymptotique ne peut être valable que dans des quasi-secteurs $V_l^j(\eta)$ d'angle d'ouverture encore plus petite que V^j . Précisément, l'ouverture des $\tilde{V}_l^j(\eta)$ est $\beta^j - \alpha^j + 2\delta$, celle des V^j est $\beta^j - \alpha^j$, celle des $V_l^j(\eta)$ est $\beta^j - \alpha^j - 2\delta$ et on a les implications suivantes

$$\text{si } \eta \in S_l \text{ et } x \in V_l^j(\eta), \text{ alors } x/\eta \in V^j \quad (5.5)$$

et réciproquement

$$\text{si } X \in V^j \text{ et } \eta \in S_l \text{ avec } |\eta X| < \tilde{r}_0, \text{ alors } \eta X \in \tilde{V}_l^j(\eta). \quad (5.6)$$

En ce qui concerne les constantes \tilde{r}_0 et $\tilde{\mu}$, elles peuvent être arbitrairement proches de r_0 et μ respectivement mais pas égales.

Principe de la preuve. L'idée est d'écrire chaque fonction y_l^j comme la somme de deux fonctions y_l^{ext} et y_l^{int} qui ont chacune un développement asymptotique en puissances de η Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$, l'une y_l^{ext} indépendante de j et ayant pour développement la partie lente $\sum a_n(x)\eta^n$, et l'autre y_l^{int} ayant pour développement la partie rapide $\sum g_n^j(\frac{x}{\eta})\eta^n$. Pour construire ces deux fonctions, nous utilisons la formule de Cauchy-Heine par rapport à la variable x en choisissant des points au bord des intersections

$\tilde{V}_l^{j,j+1}(\eta) := \tilde{V}_l^j(\eta) \cap \tilde{V}_l^{j+1}(\eta)$. Dans le cas $\mu \geq 0$, il suffit de choisir des points x_l^j avec $|x_l^j| = r_0$, voir ci-dessous les formules (5.9) et (5.10); dans le cas $\mu < 0$, on suppose sans perte que $\mu < \tilde{\mu} < 0$ et il faut choisir, de plus, des points $\tilde{x}_l^j(\eta)$ avec $|\tilde{x}_l^j(\eta)| = |\tilde{\mu}\eta|$, voir les formules (5.24) et (5.25) dans la partie 5.5. Ces fonctions dépendent des points x_l^j , mais pas des $\tilde{x}_l^j(\eta)$. Pour des raisons techniques, les fonctions y_l^{ext} et y_l^{int} n'ont le comportement voulu que sur des secteurs excluant les points x_l^{j-1} et x_l^j . Cependant, ni les fonctions y_l^j , ni les fonctions a_n et g_n^j ne dépendent des points x_l^j , si bien qu'en modifiant au besoin les points x_l^k on obtiendra le comportement voulu pour y_l^j sur tout le quasi-secteur $V_l^j(\eta)$.

Des notations similaires à $\tilde{V}_l^{j,j+1}(\eta)$ seront utilisées partout dans la preuve.

Quitte à choisir pour A la constante $\tilde{A} = \min(A, Br_0^p)$ de l'énoncé, on peut supposer dans toute la partie 5

$$A \leq Br_0^p; \quad (5.7)$$

Dans la suite, nous ne traitons que le cas $\mu \geq 0$; les modifications nécessaires

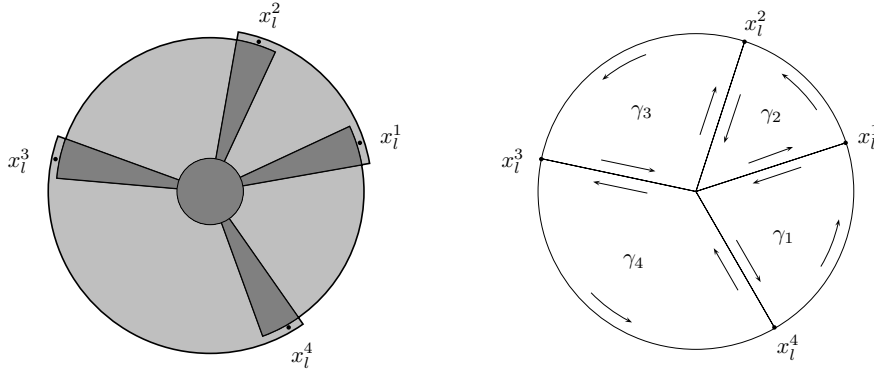


FIGURE 5.1 – A gauche, le recouvrement $(\tilde{V}_l^j(\eta))_{0 < j \leq J}$, à droite les chemins γ^j .

pour le cas $\mu < 0$ sont indiquées dans la partie 5.5. Pour chaque $j \in \{1, \dots, J\}$, soit $\psi^j \in]\alpha^{j+1} - \delta, \beta^j + \delta[$. Pour chaque $(j, l) \in \{1, \dots, J\} \times \{1, \dots, L\}$ on pose $x_l^j = \tilde{r}_0 e^{i(\psi^j + \varphi_l)}$. Ainsi on a $x_l^j \in \text{cl}(\tilde{V}_l^{j,j+1}(\eta))$ pour tout $|\eta| < \eta_0$. Notons γ^j le lacet allant de 0 à x_l^{j-1} le long du segment, puis de x_l^{j-1} à x_l^j le long d'un chemin arbitrairement proche de l'arc de cercle de rayon r_0 et enfin de x_l^j à 0 le long du segment. Pour $\eta \in S_l$ et $x \in \tilde{V}_l^j(\eta)$ avec $\arg x_l^{j-1} < \arg x < \arg x_l^j$, puisque seul γ^j entoure x (une fois et dans le sens positif), la formule des

résidus donne

$$\int_{\gamma^j} \frac{y_l^j(u, \eta)}{u - x} du = 2\pi i y_l^j(x, \eta) \quad \text{et} \quad \int_{\gamma^k} \frac{y_l^k(u, \eta)}{u - x} du = 0 \quad \text{si } k \neq j. \quad (5.8)$$

En réordonnant la somme de ces intégrales, on obtient la *formule de Cauchy-Heine*

$$y_l^j(x, \eta) = y_l^{\text{ext}}(x, \eta) + y_l^{\text{int}}(x, \eta)$$

avec

$$y_l^{\text{ext}}(x, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^J \int_{x_l^{k-1}}^{x_l^k} \frac{y_l^k(u, \eta)}{u - x} du \quad (5.9)$$

où l'intégration se fait le long d'un chemin arbitrairement proche de l'arc de cercle de rayon \tilde{r}_0 , et

$$y_l^{\text{int}}(x, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^J \int_0^{x_l^k} \frac{y_l^{k+1}(u, \eta) - y_l^k(u, \eta)}{u - x} du. \quad (5.10)$$

Par sa définition (5.9), la fonction $y_l^{\text{ext}}(x, \eta)$ est holomorphe bornée sur $D(0, r_0) \times S_l$. Par la relation $y_l^{\text{int}}(x, \eta) = y_l^j(x, \eta) - y_l^{\text{ext}}(x, \eta)$, la fonction y_l^{int} est holomorphe bornée quand $\eta \in S_l$, $x \in \tilde{V}_l^j(\eta)$, $|x| \leq r_0$; la formule (5.10) prolonge y_l^{int} dans le secteur infini $S(\arg x_l^{j-1}, \arg x_l^j, \infty)$ en x . Concernant les fonctions y_l^{ext} , nous démontrerons dans la section 5.2 le résultat suivant.

Lemme 5.2 . *Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathcal{H}(r_0)$ et une constante $C > 0$ telles que, pour tout entier $N > 0$, tout indice $l \in \{1, \dots, L\}$ et tout couple $(x, \eta) \in D(0, r_0) \times S_l$*

$$\left| y_l^{\text{ext}}(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n(x) \eta^n \right| \leq C A^{-N/p} \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right) |\eta|^N.$$

Au vu de la dépendance des x_l^j par rapport à l , il convient d'introduire les fonctions

$$Y_l^j(X, \eta) := y_l^{\text{int}}(\eta X, \eta)$$

sur l'ensemble des (X, η) tels que $\eta \in S_l$ et, ou bien $\arg(X) \in]\psi^{j-1} + \delta, \psi^j - \delta[$, ou bien $(|\eta X| \leq r_0 \text{ et } X \in V^j)$. On note cet ensemble E_l^j ; il dépend du choix des ψ^j . Pour ces fonctions, on a le résultat suivant.

Lemme 5.3 . *Il existe une constante $C > 0$ et, pour chaque $j = 1, \dots, J$, une suite $(g_n^j)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions holomorphes dans V^j , tendant vers 0 quand*

$\arg X \in]\psi^{j-1} + \delta, \psi^j - \delta[$, $|X| \rightarrow \infty$ telles que pour tout $l \in \{1, \dots, L\}$, tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout (X, η) avec $\eta \in S_l$ et $\arg X \in]\psi^{j-1} + \delta, \psi^j - \delta[$ on a

$$\left| Y_l^j(X, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} g_n^j(X) \eta^n \right| \leq C A^{-N/p} \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right) |\eta|^N. \quad (5.11)$$

De plus, pour tout compact K de V^j , il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $l \in \{1, \dots, L\}$, tout $N \in \mathbb{N}^*$, tout $\eta \in S_l$ avec $|\eta| < \eta_0$ et tout $X \in K$, on ait l'inégalité (5.11).

Les fonctions ainsi que la constante dans ce lemme dépendent a priori des ψ^j , $j = 1, \dots, J$. Ce lemme est démontré dans la partie 5.3.

Comme $y_l^j(x, \eta) = y_l^{\text{ext}}(x, \eta) + Y_l^j\left(\frac{x}{\eta}, \eta\right)$, on obtient ainsi presque un DAC.

Précisément il existe une constante \tilde{C} telle que pour tout j, l, N et tout $\eta \in S_l$, $x \in S(\psi^{j-1} + \varphi_l + 2\delta, \psi^j + \varphi_l - 2\delta, r_0)$

$$\left| y_l^j(x, \eta) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_n(x) + g_n^j\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \right| \leq \tilde{C} A^{-N/p} \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right) |\eta|^N. \quad (5.12)$$

Puisque les fonctions g_n^j tendent vers 0 quand $|X| \rightarrow \infty$, celles-ci et les a_n sont déterminées uniquement par les inégalités (5.12) d'après la remarque 3 après la définition 3.4. Par conséquent, les a_n et les g_n^j sont indépendantes du choix des ψ^j , i.e. des x_l^j , et les inégalités (5.12) sont donc valables dans toute union finie de secteurs en x qu'on peut obtenir par des choix différents de ces points. En utilisant la dernière phrase du lemme, on peut compléter en des quasi-secteurs dans le cas $\mu > 0$.

Ceci démontre (5.3); on ne peut pas encore parler d'un DAC, car on n'a pas encore la propriété requise que les $g_n^j(X)$ admettent des développements asymptotiques quand $X \rightarrow \infty$. Les inégalités (5.4), i.e. le fait que les $g_n^j(X)$, $n \in \mathbb{N}$ admettent des développements asymptotiques Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ compatibles, seront démontrées dans section 5.4. Ceci complétera la démonstration du théorème.

5.2 La partie lente.

La formule (5.9) définit pour chaque indice l une fonction analytique bornée sur $D(0, r_0) \times S_l$, et les différences satisfont, pour tout $x \in D(0, r_0)$ et tout $\eta \in S_{l,l+1} := S_l \cap S_{l+1}$

$$\begin{aligned} 2\pi i (y_{l+1}^{\text{ext}}(x, \eta) - y_l^{\text{ext}}(x, \eta)) &= \sum_{k=1}^J \int_{x_{l+1}^{k-1}}^{x_l^k} \frac{y_{l+1}^k(u, \eta) - y_l^k(u, \eta)}{u - x} du + \\ &\quad \sum_{k=1}^J \int_{x_l^k}^{x_{l+1}^{k+1}} \frac{y_{l+1}^k(u, \eta) - y_l^{k+1}(u, \eta)}{u - x} du. \end{aligned}$$

Par hypothèse, sur l'arc de x_{l+1}^{k-1} à x_l^k on a

$$|y_{l+1}^k(u, \eta) - y_l^k(u, \eta)| \leq C \exp\left(-\frac{A}{|\eta|^p}\right).$$

Pour la deuxième intégrale, on utilise le fait que, suivant les valeurs de u sur l'arc de x_l^k à x_{l+1}^{k+1} , une (au moins) des deux identités suivantes est valide : $y_{l+1}^k(u) - y_l^{k+1}(u) = (y_{l+1}^k(u) - y_l^k(u)) + (y_l^k(u) - y_l^{k+1}(u))$ ou bien $y_{l+1}^k(u) - y_l^{k+1}(u) = (y_{l+1}^k(u) - y_{l+1}^{k+1}(u)) + (y_{l+1}^{k+1}(u) - y_l^{k+1}(u))$. En utilisant (5.1) et (5.2), et avec des chemins d'intégration ε -proches de l'arc de cercle, ε arbitrairement petit, on obtient

$$\begin{aligned} |y_{l+1}^k(u, \eta) - y_l^{k+1}(u, \eta)| &\leq C \left(\exp\left(-\frac{A}{|\eta|^p}\right) + \exp\left(-\frac{B\tilde{r}_0^p}{|\eta|^p}\right) \right) \\ &\leq 2C \exp\left(-\frac{A}{|\eta|^p}\right), \end{aligned}$$

puisque $A \leq B\tilde{r}_0^p$ et $r_0 < \tilde{r}_0$. Sur les chemins d'intégration on a $|u - x| \geq \tilde{r}_0 - r_0 - \varepsilon$. Ainsi, puisque ε est arbitraire, on a pour tout $(x, \eta) \in D(0, r_0) \times S_{l,l+1}$

$$|y_{l+1}^{\text{ext}}(x, \eta) - y_l^{\text{ext}}(x, \eta)| \leq \frac{2C}{r_0 - r_0} \exp\left(-\frac{A}{|\eta|^p}\right). \quad (5.13)$$

En utilisant le lemme de Ramis-Sibuya classique (voir lemme 5.4 ci-dessous), on obtient que les fonctions y_l^{ext} ont un développement asymptotique commun Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ uniformément dans $D(0, r_0)$. Pour la complétude du mémoire, nous donnons une preuve de ce résultat.

Lemme 5.4 . *On suppose que $S_l = S(\alpha_l, \beta_l, \eta_0)$, $l = 1, \dots, L$ forment un bon recouvrement du disque épointé $D(0, \eta_0)^*$. Soit $f_l : S_l \rightarrow \mathbb{C}$, $l=1, \dots, L$, des fonctions holomorphes bornées par une constante $C > 0$. On suppose qu'il existe des constantes $D, A > 0$ telles que $|f_{l+1}(\eta) - f_l(\eta)| \leq D e^{-A/|\eta|^p}$ pour tout $l = 1, \dots, L$ et tout $\eta \in S_{l,l+1}$. Alors les fonctions f_1, \dots, f_L admettent un développement asymptotique Gevrey $\frac{1}{p}$ commun. Précisément, il existe une constante \tilde{C} et une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que*

$$\left| f_l(\eta) - \sum_{n=0}^{N-1} c_n \eta^n \right| \leq \tilde{C} A^{-N/p} \Gamma\left(\frac{N}{p} + 1\right) |\eta|^N$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, tout l et tout $\eta \in S_l$.

REMARQUE . La constante \tilde{C} ne dépend que des données $A, C, D, \eta_0, \alpha_l, \beta_l$. Les coefficients c_n peuvent être exprimées par des intégrales; voir la formule (5.15) ci-dessous. Par conséquent, si les fonctions dépendent de paramètres de façon analytique, resp. continue, si les fonctions sont uniformément bornées et si les constantes D et A sont indépendantes des paramètres, alors les c_n sont aussi analytiques, resp. continus, par rapport à ces paramètres et les majorations des restes dans le lemme sont uniformes.

Preuve. Fixons $\gamma > 0$ tel que $\beta_l - \alpha_{l+1} \geq 2\gamma$ pour tout $l \in \{0, \dots, L\}$. On pose $T_l = \eta_0 e^{i\phi_l}$ avec des $\phi_l \in [\alpha_{l+1}, \beta_l]$ à choisir. Par un réarrangement de formules de résidus analogues à (5.8), on obtient la formule de Cauchy-Heine classique

$$f_l(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^L \left(\int_0^{T_k} \frac{f_{k+1}(v) - f_k(v)}{v - \eta} dv + \int_{T_{k-1}}^{T_k} \frac{f_k(v)}{v - \eta} dv \right), \quad (5.14)$$

où, de même que précédemment, l'intégration de T_{k-1} à T_k se fait le long d'un chemin arbitrairement proche de l'arc de cercle de rayon η_0 .

Pour $n \in \mathbb{N}$ posons

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^L \left(\int_0^{T_k} (f_{k+1}(v) - f_k(v)) \frac{dv}{v^{n+1}} + \int_{T_{k-1}}^{T_k} f_k(v) \frac{dv}{v^{n+1}} \right). \quad (5.15)$$

Fixons à présent $N \in \mathbb{N}^*$ et posons

$$r(\eta) = f_l(\eta) - \sum_{n=0}^{N-1} c_n \eta^n.$$

En remplaçant $\frac{1}{v - \eta}$ par $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\eta^n}{v^{n+1}} + \frac{\eta^N}{v^N(v - \eta)}$ dans (5.14), on obtient

$$r(\eta) = r_1(\eta) + r_2(\eta) \quad (5.16)$$

avec

$$r_1(\eta) = \frac{\eta^N}{2\pi i} \sum_{k=1}^L \int_0^{T_k} \frac{f_{k+1}(v) - f_k(v)}{v^N(v - \eta)} dv$$

et

$$r_2(\eta) = \frac{\eta^N}{2\pi i} \sum_{k=1}^L \int_{T_{k-1}}^{T_k} \frac{f_k(v)}{v^N(v - \eta)} dv.$$

Supposons d'abord $\alpha_l + \gamma \leq \arg \eta \leq \beta_l - \gamma$ et $|\eta| \leq (1 - \gamma)\eta_0$. Alors, en utilisant $\phi_{l-1} = \alpha_l$ et $\phi_l = \beta_l$, on obtient $|v - \eta| \geq |v| \sin \gamma$ sur tous les segments $[0, T_k]$. En tenant compte de l'hypothèse, ceci implique

$$|r_1(\eta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\eta_0} \frac{De^{-A/t^p}}{\sin \gamma} \frac{dt}{t^{N+1}} |\eta|^N \leq \frac{D\Gamma(\frac{N}{p})}{2\pi p A^{N/p} \sin \gamma} |\eta|^N$$

Pour l'autre partie du reste, on a

$$|r_2(\eta)| \leq \frac{C}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\eta_0 d\theta}{\eta_0^{N+1} \gamma} |\eta|^N = \frac{C}{\eta_0^N \gamma} |\eta|^N.$$

La combinaison des deux majorations donne l'énoncé avec une constante \tilde{C} , qui dépend de C, D, η_0, γ et de $\sup_N \eta_0^{-N} A^{N/p} \frac{1}{\Gamma} (\frac{N}{p} + 1)$.

Dans le cas où $\arg \eta - \alpha_l < \gamma$, on a $\beta_{l-1} - \arg \eta \geq \gamma$ et en utilisant un autre choix d'angle ϕ_k , on obtient une majoration analogue du reste pour f_{l-1} . Comme $|f_{l-1}(\eta) - f_l(\eta)| \leq De^{-A/|\eta|^p}$ et $|\eta|^{-N} e^{-A/|\eta|^p} \leq A^{-N/p} \Gamma(\frac{N}{p} + 1)$, on conclut que la majoration du reste est aussi valable pour f_l .

Dans le cas $\beta_l - \arg \eta < \gamma$, on procède de manière analogue avec f_{l+1} à la place de f_l ; dans le cas $\eta_0(1 - \gamma) \leq |\eta| \leq \eta_0$, la majoration du reste est faite simplement en utilisant les majorations des c_n et de f_l , si on choisit \tilde{C} assez grand. \square

5.3 La partie rapide.

Considérons à présent, pour $l = 1, \dots, L, j = 1, \dots, J$, les fonctions

$$\begin{aligned} Y_l^j(X, \eta) = y_l^{j \text{ int}}(\eta X, \eta) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^J \int_0^{x_l^k} \frac{y_l^{k+1}(u, \eta) - y_l^k(u, \eta)}{u - \eta X} du \\ &= y_l^j(\eta X, \eta) - y_l^{\text{ext}}(\eta X, \eta) \end{aligned} \quad (5.17)$$

définies sur l'ensemble E_l^j des (X, η) tels que $\eta \in S_l$ et, ou bien $\arg(X) \in]\psi^{j-1} + \delta, \psi^j - \delta[$, ou bien $|\eta X| < r_0, X \in V^j$. Rappelons que l'ensemble E_l^j dépend du choix des ψ^j et que les notations de la section 5.1 sont utilisées.

Pour démontrer le lemme 5.3, nous montrons d'abord

Lemme 5.5 . *Il existe une constante $\tilde{C} > 0$ telle que pour tout $(j, l) \in \{1, \dots, J\} \times \{1, \dots, L\}$ et tout $(X, \eta) \in E_{l,l+1}^j$ on ait*

$$\left| Y_{l+1}^j(X, \eta) - Y_l^j(X, \eta) \right| \leq \tilde{C} \exp\left(-\frac{A}{|\eta|^p}\right). \quad (5.18)$$

Preuve. Si $X \in V^j$ et $|\eta X| < r_0$, alors $\eta X \in \tilde{V}_{l,l+1}^j(\eta)$. On utilise dans ce cas

$$Y_{l+1}^j(X, \eta) - Y_l^j(X, \eta) = (y_{l+1}^j - y_l^j + y_l^{\text{ext}} - y_{l+1}^{\text{ext}})(\eta X, \eta)$$

et les majorations (5.1) et (5.13). Si $\arg(X) \in]\psi^{j-1} + \delta, \psi^j - \delta[$ et $|\eta X| \geq r_0$, on reprend la formule intégrale définissant $y_l^{j \text{ int}}$, qui donne

$$\begin{aligned} Y_{l+1}^j(X, \eta) - Y_l^j(X, \eta) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^J \left(\int_0^{x_{l+1}^k} \frac{(y_{l+1}^{k+1} - y_{l+1}^k)(u, \eta)}{u - \eta X} du - \int_0^{x_l^k} \frac{(y_l^{k+1} - y_l^k)(u, \eta)}{u - \eta X} du \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^J \left(\int_0^{\xi_l^k} \frac{(y_{l+1}^{k+1} - y_l^{k+1} + y_l^k - y_{l+1}^k)(u, \eta)}{u - \eta X} du + \right. \\ &\quad \left. \int_{\xi_l^k}^{x_{l+1}^k} \frac{(y_{l+1}^{k+1} - y_{l+1}^k)(u, \eta)}{u - \eta X} du + \int_{x_l^k}^{\xi_l^k} \frac{(y_l^{k+1} - y_l^k)(u, \eta)}{u - \eta X} du \right) \end{aligned}$$

où $\xi_l^k = \tilde{r}_0 e^{i(\psi^j + \gamma_l)}$, $\varphi_l < \gamma_l < \varphi_{l+1}$ désigne un point dans l'intersection $\tilde{V}_l^{k,k+1}(\eta) \cap \tilde{V}_{l+1}^{k,k+1}(\eta)$. Sur chacun des chemins, le dénominateur $u - \eta X$ est minoré en module par $r_0 \sin(\delta/2)$, le numérateur $y_{l+1}^{k+1} - y_l^{k+1} + y_l^k - y_{l+1}^k$ dans la première intégrale est majoré par $2C \exp\left(-\frac{A}{|\eta|^p}\right)$ d'après (5.1), et les numérateurs des deuxième et

troisième intégrales sont majorés par $C \exp\left(-\frac{Br_0^p}{|\eta|^p}\right) \leq C \exp\left(-\frac{A}{|\eta|^p}\right)$ d'après (5.2) et (5.7). \square

Le lemme 5.3 découle directement du lemme précédent par le lemme de Ramis-Sibuya classique 5.4 ; la dépendance analytique des fonctions $g_n^j(X)$ obtenues découle de la formule (5.15) définissant ces coefficients, comme indiqué dans la remarque qui suit le lemme 5.4. De la même façon, on déduit d'abord de leurs définitions par des intégrales que toutes les $Y_l^j(X, \eta)$ tendent vers 0 quand $X \rightarrow \infty$, $\arg(X) \in]\psi^{j-1} + \delta, \psi^j - \delta[$, si η est dans un compact ne pas contenant 0 et ensuite que les $g_n^j(X)$ tendent vers 0 quand $X \rightarrow \infty$.

5.4 Étude des fonctions g_n^j .

Rappelons que les fonctions g_n^j du développement asymptotique de la fonction Y_l^j du lemme 5.3 sont obtenues par l'application du lemme 5.4 et donc définies par

$$g_n^j(X) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^L \left(\int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} Y_k^j(X, v) \frac{dv}{v^{n+1}} + \int_0^{\eta_k} \left(Y_{k+1}^j(X, v) - Y_k^j(X, v) \right) \frac{dv}{v^{n+1}} \right) \quad (5.19)$$

où $\eta_k \in \text{cl}(S_{k,k+1})$, $k = 1, \dots, L$ satisfont $|\eta_1| = \dots = |\eta_L| =: r \leq \eta_0$, et que les fonctions Y_l^j sont définies par (5.17) ; la formule est donc valide pour tout $X \in V^j$ tel que, ou bien $r|X| < r_0$, ou bien $\psi^{j-1} < \arg X < \psi^j$. Rappelons également que l'asymptotique (5.12) détermine les fonctions g_n^j de manière unique et que celles-ci sont donc indépendantes du choix des x_l^j dans (5.17) et du choix des η_k dans (5.19). Notons enfin une majoration de ces fonctions qui est une conséquence de (5.11) et de la liberté de choix des x_l^j : il existe une constante C telle que

$$|g_n^j(X)| \leq CA^{-n/p} \Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right) \quad (5.20)$$

pour tout n et $X \in V^j$.

Il reste à montrer que les fonctions g_n^j , $n \in \mathbb{N}$ admettent des développements asymptotiques Gevrey $\frac{1}{p}$ compatibles au sens de la définition 4.1. Ceci sera fait en adaptant la preuve du lemme 5.4 : on majore d'abord les différences $Y_l^{j+1} - Y_l^j$, ensuite $g_n^{j+1} - g_n^j$ et enfin les restes des développements asymptotiques.

D'abord d'après (5.6), si $\eta \in S_l$ et $X \in V^{j,j+1}$ sont tels que $|\eta X| < r_0$, alors $\eta X \in \tilde{V}_l^{j,j+1}(\eta)$. De plus, puisque y_l^{ext} ne dépend pas de j , on a dans ce cas

$$Y_l^{j+1}(X, \eta) - Y_l^j(X, \eta) = y_l^{j+1}(\eta X, \eta) - y_l^j(\eta X, \eta)$$

et (5.2) s'applique. On obtient, pour $X \in V^{j,j+1}$ et $\eta \in S_l$ tels que $|\eta X| < r_0$, la majoration

$$|Y_l^{j+1}(X, \eta) - Y_l^j(X, \eta)| \leq C \exp(-B|X|^p). \quad (5.21)$$

On utilise maintenant (5.19) pour majorer $g_n^{j+1} - g_n^j$. Contrairement au lemme 5.3, nous voulons ici un résultat asymptotique lorsque X tend vers l'infini dans le secteur $V^{j,j+1}$. Pour cela, nous allons utiliser l'estimation exponentielle des différences

$Y_l^{j+1} - Y_l^j$ donnée par (5.21). Par conséquent le module r des points η_l ne peut plus être fixé, mais doit nécessairement dépendre de X . On a

$$g_n^{j+1}(X) - g_n^j(X) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^L \left(\int_{\eta_{l-1}}^{\eta_l} \left(Y_l^{j+1} - Y_l^j \right) (X, v) \frac{dv}{v^{n+1}} + \int_0^{\eta_l} \left(Y_{l+1}^{j+1} - Y_l^{j+1} - Y_{l+1}^j + Y_l^j \right) (X, v) \frac{dv}{v^{n+1}} \right)$$

où les intégrales de η_{l-1} à η_l sont arbitrairement proches des arcs du cercle de rayon r . Sur ces arcs, on a bien $\eta X \in \tilde{V}_l^{j,j+1}(\eta)$. On choisit $r = r_0/|X|$, quand $|X| \geq L := \eta_0/r_0 + 1$. Alors en utilisant (5.21), on obtient qu'il existe une constante \tilde{C} telle que, pour tout $|X| \geq L$ et tout (n, j) , la somme des intégrales de η_{l-1} à η_l est inférieure à $\tilde{C} r_0^{-n} |X|^n \exp(-B|X|^p)$.

Aux intégrales de 0 à η_l , on peut appliquer (5.18) si on écrit le numérateur $(Y_{l+1}^{j+1} - Y_l^{j+1}) - (Y_{l+1}^j - Y_l^j)$ et on peut appliquer (5.21) si on l'écrit $(Y_{l+1}^{j+1} - Y_{l+1}^j) - (Y_l^{j+1} - Y_l^j)$. Ceci entraîne qu'il existe une constante \bar{C} telle que la somme des intégrales de 0 à η_l est majorée par

$$\bar{C} \int_0^r \min\left(e^{-A/v^p}, e^{-B|X|^p}\right) v^{-n-1} dv ;$$

rappelons que $|X| \geq L$ et $r = r_0/|X|$. En déterminant $q > 0$ par l'équation $A/q^p = B$, ceci devient

$$\bar{C} \left(\int_0^{q/|X|} e^{-A/v^p} v^{-n-1} dv + e^{-B|X|^p} \int_{q/|X|}^{r_0/|X|} v^{-n-1} dv \right),$$

où $|X| \geq L \geq 1$. En faisant un changement de variable dans la première intégrale, on en déduit que cette somme d'intégrales de 0 à η_l est majorée par

$$\bar{C} \left(\frac{1}{p} A^{-n/p} \Gamma\left(\frac{n}{p}, B|X|^p\right) + \frac{1}{n} q^{-n} |X|^n e^{-B|X|^p} \right) ;$$

ici $\Gamma(a, u) = \int_u^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$, $\text{Re } a > 0$, est la fonction Gamma incomplète. Il est préférable de laisser ici la fonction Gamma incomplète car des majorations plus simples sont différentes si n est petit, respectivement grand.

En combinant les deux majorations, on en déduit l'existence d'une constante C telle que

$$|g_n^{j+1}(X) - g_n^j(X)| \leq C \left(A^{-n/p} \Gamma\left(\frac{n}{p}, B|X|^p\right) + q^{-n} |X|^n e^{-B|X|^p} \right) \quad (5.22)$$

pour tout n, j et $X \in V^{j,j+1}$, $|X| \geq L$.

Utilisons maintenant la formule de Cauchy-Heine dans la variable $Z = \frac{1}{X}$. Considérons le secteur V^j et d'abord seulement les $X \in V^j$ avec $|X| \geq L + 1$ et $\alpha^j + \delta < \arg X < \beta^j - \delta$. Pour chaque $k = 1, \dots, J$ soit $X_k \in V^{k,k+1}$ tels que $|X_k| = L$; en particulier $\arg X_{j-1} = \alpha^j$ et $\arg X_j = \beta^j$. Soit $Z_k = \frac{1}{X_k}$. En posant

$$g_{mn} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^J \left(\int_0^{Z_k} \left(g_n^{k+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - g_n^k\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right) \frac{d\zeta}{\zeta^{m+1}} + \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} g_n^k\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta^{m+1}} \right),$$

on obtient ainsi, par un calcul analogue à celui de r_1 et r_2 dans la preuve du lemme 5.4

$$X^M \left(g_n^j(X) - \sum_{m=0}^{M-1} g_{mn} X^{-m} \right) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^J \left(\int_0^{Z_k} \frac{g_n^{k+1}(\frac{1}{\zeta}) - g_n^k(\frac{1}{\zeta})}{\zeta^M (\zeta - \frac{1}{X})} d\zeta + \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \frac{g_n^k(\frac{1}{\zeta})}{\zeta^M (\zeta - \frac{1}{X})} d\zeta \right)$$

pour $X \in V^j$, $|X| \geq L+1$, $\alpha^j + \delta < \arg X < \beta^j - \delta$. En utilisant la majoration (5.22) et la minoration $|\zeta - \frac{1}{X}| \geq |\zeta| \sin \delta$ sur les chemins d'intégration, on majore en module la somme des intégrales de 0 à Z_k par

$$\frac{JC}{2\pi \sin \delta} \left(A^{-n/p} \int_0^{+\infty} \Gamma\left(\frac{n}{p}, Bt^{-p}\right) \frac{dt}{t^{M+1}} + q^{-n} \int_0^{+\infty} e^{-Bt^{-p}} \frac{dt}{t^{M+n+1}} \right)$$

et, après le changement de variable $s = Bt^{-p}$ et en utilisant la formule

$$\int_0^\infty s^{a-1} \Gamma(b, s) ds = \frac{1}{a} \Gamma(a+b),$$

on majore cette somme d'intégrales par

$$\frac{JC}{2\pi p \sin \delta} \left(\frac{p}{M} + 1 \right) A^{-n/p} B^{-M/p} \Gamma\left(\frac{n+M}{p}\right).$$

La majoration des intégrales de Z_{k-1} à Z_k suit de manière plus simple de (5.20). Leur somme est majorée par

$$JC A^{-n/p} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L+1} \right)^{-1} \Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right) L^{-M}.$$

Comme il existe une constante D telle que $\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right) L^{-M} \leq DB^{-M/p} \Gamma\left(\frac{n+M}{p} + 1\right)$ pour tout $n, M \in \mathbb{N}$, on en déduit l'existence d'une constante C telle que

$$\left| X^M \left(g_n^j(X) - \sum_{m=0}^{M-1} g_{mn} X^{-m} \right) \right| \leq C A^{-n/p} B^{-M/p} \Gamma\left(\frac{n+M}{p} + 1\right) \quad (5.23)$$

pour tout n, M et $X \in V^j$ avec $|X| \geq L+1$ et $\alpha^j + \delta < \arg X < \beta^j - \delta$.

Pour $X \in V^j$ avec $\arg X$ proche de α^j ou $\arg X$ proche de β^j , on procède de manière analogue à la fin de la preuve du lemme 5.4. Il suffit de traiter le premier cas : on considère d'abord les majorations pour g_n^{j-1} et on ajoute des termes dus aux majorations des différences $g_n^j - g_n^{j-1}$. On utilise pour cela le fait qu'il existe une constante D telle que $T^M \Gamma\left(\frac{n}{p}, BT^p\right) \leq DB^{-M/p} \Gamma\left(\frac{n+M}{p} + 1\right)$ et $T^{n+M} e^{-BT^p} \leq DB^{-M/p} \Gamma\left(\frac{n+M}{p} + 1\right)$ pour tout $n, M, T, B > 0$ (utiliser le fait que pour $\alpha, \beta > 0$, la fonction $f(t) = t^\alpha \Gamma(\beta, t)$ admet son maximum en un point t tel que $f(t) = \frac{1}{\alpha} t^{\alpha+\beta} e^{-t}$).

Ainsi, on a enfin démontré qu'il existe une constante C telle que (5.23) est valable pour tout n, j, M et tout $X \in V^j$ avec $|X| \geq L+1$. En vertu de la remarque 4.2 et de (5.20), ceci suffit pour montrer que les suites des g_n^j , $n = 0, 1, \dots$ admettent des développements Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ compatibles au sens de la définition 4.1. La preuve du théorème 5.1 dans le cas $\mu \geq 0$ est à présent complète. \square

5.5 Le cas μ négatif.

Nous indiquons dans la suite les modifications de la démonstration précédente nécessaires dans le cas $\mu < \tilde{\mu} < 0$.

Comme avant, pour chaque $j \in \{1, \dots, J\}$, soit $\psi^j \in]\alpha^{j+1} - \delta, \beta^j + \delta[$. Pour chaque $(j, l) \in \{1, \dots, J\} \times \{1, \dots, L\}$ on pose $x_l^j = \tilde{r}_0 e^{i(\psi^j + \varphi_l)}$ et pour tout $\eta \neq 0$ on pose $\tilde{x}_l^j = \tilde{x}_l^j(\eta) = |\tilde{\mu}\eta| e^{i(\psi^j + \varphi_l)}$. Ainsi on a $x_l^j, \tilde{x}_l^j \in \text{cl}(\tilde{V}_l^{j,j+1}(\eta))$ pour tout $|\eta| < \eta_0$. Notons γ^j un lacet inclus dans $\tilde{V}_l^{j,j+1}(\eta)$ allant de \tilde{x}_l^{j-1} à x_l^{j-1} le long du segment, puis de x_l^{j-1} à x_l^j le long d'un chemin arbitrairement proche de l'arc de cercle de rayon r_0 , ensuite de x_l^j à \tilde{x}_l^j le long du segment et enfin de \tilde{x}_l^j à \tilde{x}_l^{j-1} arbitrairement proche de l'arc de cercle de rayon $|\tilde{\mu}\eta|$. Pour $\eta \in S_l$ et $x \in \tilde{V}_l^j(\eta)$ avec $\arg x_l^{j-1} < \arg x < \arg x_l^j$, on obtient comme avant

$$\int_{\gamma^j} \frac{y_l^j(u, \eta)}{u - x} du = 2\pi i y_l^j(x, \eta) \quad \text{et} \quad \int_{\gamma^k} \frac{y_l^k(u, \eta)}{u - x} du = 0 \quad \text{pour tout } k \neq j$$

et en réordonnant la somme de ces intégrales, on obtient la formule de Cauchy-Heine

$$y_l^j(x, \eta) = y_l^{\text{ext}}(x, \eta) + y_l^{\text{int}}(x, \eta)$$

avec

$$y_l^{\text{ext}}(x, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^J \int_{x_l^{k-1}}^{x_l^k} \frac{y_l^k(u, \eta)}{u - x} du \quad (5.24)$$

où l'intégration se fait le long d'un chemin arbitrairement proche de l'arc de cercle de rayon \tilde{r}_0 , et

$$y_l^{\text{int}}(x, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^J \int_{\tilde{x}_l^k}^{x_l^k} \frac{y_l^{k+1}(u, \eta) - y_l^k(u, \eta)}{u - x} du - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^J \int_{\tilde{x}_l^{k-1}}^{\tilde{x}_l^k} \frac{y_l^k(u, \eta)}{u - x} du \quad (5.25)$$

où l'intégration se fait le long d'un chemin arbitrairement proche de l'arc de cercle de rayon $|\tilde{\mu}\eta|$, c.f. figure 5.2. Puisque ni y_l^j ni y_l^{ext} ne dépendent des points \tilde{x}_l^k , les fonctions y_l^{int} n'en dépendent pas non plus. Le traitement des fonctions y_l^{ext} est identique au cas $\tilde{\mu} > 0$; pour les fonction y_l^{int} , il faut vérifier que les intégrales de \tilde{x}_l^{k-1} à \tilde{x}_l^k , qui ne figuraient pas dans la formule (5.10) du cas $\tilde{\mu} > 0$, n'introduisent aucun problème.

D'abord, les fonctions $Y_l^j(X, \eta) = y_l^{\text{int}}(\eta X, \eta)$ sont définies sur l'ensemble des (X, η) tels que $\eta \in S_l$ et, ou bien $(\arg(X) \in]\psi^{j-1} + \delta, \psi^j - \delta[$ et $|X| > \tilde{\mu}$ ou bien $(|X| > \tilde{\mu}, |\eta X| \leq r_0$ et $X \in V^j)$. On note cet ensemble E_l^j ; il dépend du choix des ψ^j et de $|\eta|$.

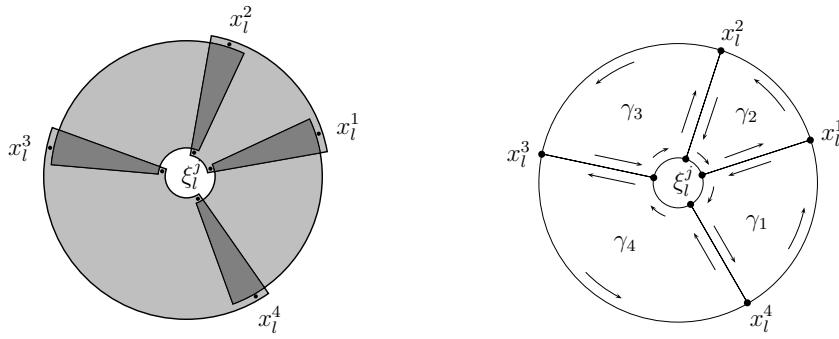


FIGURE 5.2 – Les chemins d'intégration pour $\mu < 0$.

Les lemmes 5.5 et 5.3 restent valables. En effet, la formule exprimant la différence des fonctions dans le cas $|\eta X| \geq r_0$ devient

$$Y_{l+1}^j(X, \eta) - Y_l^j(X, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^J \left(\int_{\tilde{\xi}_l^k}^{\xi_l^k} \frac{(y_{l+1}^{k+1} - y_l^{k+1} + y_l^k - y_{l+1}^k)(u, \eta)}{u - \eta X} du + \int_{\xi_l^k}^{x_{l+1}^k} \frac{(y_{l+1}^{k+1} - y_l^{k+1})(u, \eta)}{u - \eta X} du + \int_{x_l^k}^{\xi_l^k} \frac{(y_l^{k+1} - y_l^k)(u, \eta)}{u - \eta X} du - \int_{\tilde{\xi}_l^{k-1}}^{\tilde{\xi}_l^k} \frac{(y_{l+1}^k - y_l^k)(u, \eta)}{u - \eta X} du \right)$$

où $\xi_l^k = \tilde{r}_0 e^{i(\psi^j + \gamma_l)}$ et $\tilde{\xi}_l^k = |\eta \tilde{\mu}| e^{i(\psi^j + \gamma_l)}$, $\varphi_l < \gamma_l < \varphi_{l+1}$ désignent des points dans l'intersection $\tilde{V}_l^{k,k+1}(\eta) \cap \tilde{V}_{l+1}^{k,k+1}(\eta)$. Ici, les points \tilde{x}_l^j respectivement \tilde{x}_{l+1}^j de la formule (5.25) pour Y_l^j respectivement Y_{l+1}^j ont été modifiés en $\tilde{\xi}_l^j$ avant la soustraction. Seule la dernière intégrale ne figurait pas avant ; elle est exponentiellement petite par l'hypothèse (5.1). Dans l'étude des fonctions g_n^j , rien ne change.

5.6 Composition d'un DAC Gevrey par une fonction analytique.

Le théorème 5.1 et sa réciproque la proposition 4.14 permettent de démontrer rapidement une généralisation de la proposition 3.5 aux DAC Gevrey : la composée — à gauche ou à droite — d'une fonction ayant un DAC Gevrey par une fonction analytique a un DAC Gevrey. Auparavant, nous rappelons le résultat analogue concernant les développements Gevrey classiques. D'une part cela permet d'indiquer la preuve utilisant le théorème de Ramis-Sibuya classique, d'autre part ce résultat sera utilisé dans la suite.

Proposition 5.6 . On considère y une fonction holomorphe définie sur $D \times S$, où D est un domaine et où S est le secteur $S(\alpha, \beta, \eta_0)$, à valeurs dans un ensemble $W \subset \mathbb{C}$ et admettant un développement Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ en η uniforme par rapport à $x \in D$.

- (a) Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de l'adhérence de W . Alors la fonction $z = f \circ y$ admet un développement Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ en $\eta \in S$ uniforme par rapport à $x \in D$.
- (b) Soit $\varphi : D(0, x_1) \times D(0, \eta_0) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée telle que $\varphi(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = 1$. Soit K un compact de D et soit $\tilde{D} \subset \mathbb{C}$ tel que $\varphi(x, \eta) \in K$ quand $\eta \in S$ et $x \in \tilde{D}$. Alors la fonction $z : (x, \eta) \mapsto y(\varphi(x, \eta), \eta)$ admet un développement Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ en η uniforme par rapport à $x \in \tilde{D}$.

Preuve. Soit $y(x, \eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \eta^n$ le développement asymptotique de y . On choisit des secteurs S_l , $l = 2, \dots, L$ d'angle d'ouverture strictement inférieur à $\frac{\pi}{p}$, tels qu'en ajoutant $S_1 := S$ on obtienne un bon recouvrement de $D(0, \eta_0)^*$. Comme indiqué dans la preuve de lemme 4.10, il existe des fonctions y_l sur $D \times S_l$, $l = 2, \dots, L$, admettant $\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \eta^n$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ uniformément sur D . En posant $y_1 = y$ on obtient que les différences admettent la série 0 comme développement Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$; elles sont donc exponentiellement petites : il existe des constantes $C, A > 0$ telles que $|y_l(x, \eta) - y_{l-1}(x, \eta)| \leq C \exp(-A/|\eta|^p)$ quand $\eta \in S_{l-1} \cap S_l$ et $x \in D$. Sous l'hypothèse de l'item (a), quand $|\eta|$ est assez petite, on peut définir $z_l = f \circ y_l$ et l'on a

$$|z_l(x, \eta) - z_{l-1}(x, \eta)| \leq CM \exp(-A/|\eta|^p)$$

où M est le maximum de $|f'|$ sur l'adhérence de W . Par le lemme 5.4, ceci implique (a). On trouve une preuve plus détaillée dans [8].

Sous l'hypothèse de (b), on pose de manière analogue $z_l(x, \eta) = y_l(\varphi(x, \eta), \eta)$ et on vérifie qu'elles sont définies quand $x \in \tilde{D}$ et $\eta \in S_l$ est assez petit. Alors on a évidemment $|z_l(x, \eta) - z_{l-1}(x, \eta)| \leq C \exp(-A/|\eta|^p)$ quand $\eta \in S_{l-1} \cap S_l$ et $x \in \tilde{D}$ et on conclut comme avant. \square

Théorème 5.7 . On considère y une fonction holomorphe définie pour $\eta \in S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ et $x \in V_1(\eta) = V(\alpha_1, \beta_1, r_0, \mu |\eta|)$, à valeurs dans un ensemble $W \subset \mathbb{C}$ et admettant un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$.

- (a) Soit $P(x, z, \eta)$ une fonction holomorphe définie quand $|z| < r$, $\eta \in S_2 = S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ et $x \in V_1(\eta)$ admettant un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$: $P(x, z, \eta) \sim \frac{1}{p} \hat{P}(x, z, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(A_n(x, z) + G_n\left(\frac{x}{\eta}, z\right) \right) \eta^n$ quand $S_2 \ni \eta \rightarrow 0$, $x \in V_1(\eta)$, uniformément pour $|z| < r$, i.e. les constantes des définitions 4.3 et 4.1 sont indépendantes de z avec $|z| < r$. Supposons de plus que $y(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta)$.

Alors la fonction $u : (x, \eta) \mapsto P(x, y(x, \eta), \eta)$ admet un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$.

- (b) Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de l'adhérence de W . Alors la fonction $z = f \circ y$ admet un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ pour $\eta \in S_2$ et $x \in V_1$.
- (c) Soit $\varphi : D(0, x_1) \times D(0, \eta_0) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée telle que $\varphi(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = 1$. Soit $0 < \tilde{r} \leq x_1$, $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ et $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1$ vérifiant $\alpha_1 < \tilde{\alpha}_1 < \tilde{\beta}_1 < \beta_1$ tels que $\varphi(x, \eta) \in V_1(\eta)$ quand $\eta \in S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ et $x \in \tilde{V}_1(\eta) = V(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{r}, \tilde{\mu}|\eta|)$. Alors la fonction $z : (x, \eta) \mapsto y(\varphi(x, \eta), \eta)$ admet un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ pour $\eta \in S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ et $x \in \tilde{V}_1(\eta)$.

REMARQUES . 1. Nous utiliserons le résultat du (c) essentiellement dans deux cas : le cas où φ est indépendante de η et le cas du décalage $\varphi(x, \eta) = (x + \eta T, \eta)$ avec $T \in \mathbb{C}$ fixé.

2. La preuve précédente est très indirecte et ne montre pas comment calculer en pratique le DAC de la composée, à gauche ou à droite, à partir du DAC $\hat{y}(x, \eta) = \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$ de y . Ceci a été fait dans la preuve de la proposition 3.5 pour les cas (a) et (b), et aussi pour le cas (c) lorsque φ est indépendante de η .

3. En pratique, des valeurs de $\tilde{r}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1$ et $\tilde{\mu}$ peuvent être déterminées en fonction de φ dans le cas (c). Par exemple dans la preuve du corollaire 6.3 nous utiliserons le décalage $\varphi(x, \eta) = x + R\eta$ avec un certain $R > 0$. Dans ce cas, on peut choisir $\tilde{r} = r - R\eta_0$ et, pour tout $\delta \in]0, \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}[$, $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 + \delta$, $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 - \delta$ et $\tilde{\mu} = \min\{\mu - R, -R/\sin\delta\}$. Lorsque φ ne dépend que de x , la fonction ψ de la preuve ci-dessous est identiquement nulle et on peut prendre $\tilde{\mu}$ arbitrairement proche de μ , si on réduit \tilde{r} .

Preuve. (a) À l'aide de la proposition 4.14, on associe à y une famille (y_l^j) sur un bon recouvrement cohérent et dont les différences satisfont (4.19–4.21). De manière analogue, on associe à P une famille (P_l^j) sur le même recouvrement dont les différences satisfont (4.19–4.21) uniformément par rapport à z . Pour ceci, il suffit de remplacer les coefficients scalaires et les valeurs scalaires des fonctions par des coefficients resp. valeurs dans l'espace de Banach des fonctions holomorphes bornées dans $D(0, r)$.

On pose $u_l^j(x, \eta) = P_l^j(x, y_l^j(x, \eta), \eta)$. On vérifie que les majorations (4.19–4.21) sont satisfaites pour u et les u_l^j , au besoin en augmentant la constante C . D'après le théorème 5.1, les fonctions u_l^j admettent un DAC commun qui est Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$. D'après la partie "réciproque" de la proposition 4.8 (a) appliquée à $u - u_l^j$ sur chacune des intersections, la fonction u admet le même DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$. En comparant avec la proposition 3.5, on obtient la série formelle du DAC.

La démonstration de (b) est complètement analogue.

(c) Soit $\psi(x, \eta) = \Delta_2 \varphi(x, 0, \eta)$, où $\Delta_2 \varphi$ est la différence finie de φ par rapport à la deuxième variable, définie par

$$\varphi(x, \tau) - \varphi(x, \eta) = \Delta_2 \varphi(x, \eta, \tau)(\tau - \eta). \quad (5.26)$$

Ainsi on a $\varphi(x, \eta) = \varphi(x, 0) + \eta \psi(x, \eta)$. Quitte à diminuer η_0 , la fonction ψ est bornée par une certaine constante K . Soit d'abord $\tilde{r} > 0$, $\tilde{\eta}_0 > 0$ et $\delta > 0$ assez petits et soit $\tilde{\mu} < \mu - K$. De même que pour (a), on associe à y une famille de fonctions y_l^j définies sur $V_l^j(\eta) = V(\alpha_l^j, \beta_l^j, r_0, \mu|\eta|)$, satisfaisant (4.19–4.21), et on pose $z_l^j(x, \eta) = y_l^j(\varphi(x, \eta), \eta)$ pour $\eta \in S(\alpha_2, \beta_2, \tilde{\eta}_0)$ et $x \in \tilde{V}_l^j(\eta) = V(\alpha_l^j + \delta, \beta_l^j - \delta, \tilde{r}, \tilde{\mu}|\eta|)$. D'après les conditions sur φ , les fonctions z_l^j sont bien définies et on vérifie que les ensembles S_l , V^j et $\tilde{V}_l^j(\eta)$ forment un bon recouvrement cohérent si $\tilde{r} > 0$ et $\tilde{\eta}_0 > 0$ sont suffisamment petits. Les z_l^j satisfont (4.19–4.21) avec d'autres constantes $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$, donc ont un DAC commun Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ d'après le théorème 5.1. La fonction z admet alors le même développement pour $\eta \in S(\alpha_2, \beta_2, \tilde{\eta}_0)$ et $x \in V(\alpha_1 + \delta, \beta_1 - \delta, \tilde{r}, \tilde{\mu}|\eta|)$, comme en (a). À présent, il s'agit de montrer que ce DAC est encore valide pour $\eta \in S(\alpha_2, \beta_2, \eta_0)$ et $u \in \tilde{V}_1(\eta)$.

La fonction $\Phi : (X, \eta) \mapsto \varphi(\eta X, \eta)$ satisfait $\Phi(X, \eta) = \eta X + \eta \psi(0, 0) + \mathcal{O}(\eta^2)$ donc, d'après la proposition 5.6 (b), la fonction $Z : (X, \eta) \mapsto z(\eta X, \eta)$ se prolonge et a un développement Gevrey uniforme pour $\eta \in S(\alpha_2, \beta_2, \tilde{\eta}_0)$ et $x \in V(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{r}, \tilde{\mu}|\eta|)$. Avec les propositions 4.4 et 4.5, on peut donc prolonger le DAC Gevrey de z pour $\eta \in S(\alpha_2, \beta_2, \tilde{\eta}_0)$ et $u \in V(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{r}, \tilde{\mu}|\eta|)$. De même, avec les propositions 5.6 (a), 4.4 et 4.6, on prolonge ce DAC Gevrey pour $\eta \in S(\alpha_2, \beta_2, \tilde{\eta}_0)$ et $u \in V(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{r}, \tilde{\mu}|\eta|)$. Enfin, quitte à changer les constantes C, L_1 et L_2 dans (4.8), on obtient l'énoncé. \square

6 Développements combinés et équations différentielles singulièrement perturbées.

Notre notion de développement combiné a été motivée par l'étude d'équations différentielles singulièrement perturbées de la forme (1.1), que nous réécrivons ci-dessous par commodité

$$\varepsilon y' = \Phi(x, y, \varepsilon). \quad (6.1)$$

Contrairement aux équations de la partie 2, les variables x et y sont à présent dans \mathbb{C} et le petit paramètre ε est dans un secteur du plan complexe $S = S(-\delta, \delta, \varepsilon_0)$ contenant une partie de l'axe réel positif, avec $\delta, \varepsilon_0 > 0$ fixés suffisamment petits. *A priori* la situation qui nous intéresse est ε réel positif, mais nous aurons besoin de le considérer dans un secteur.

On suppose que Φ est analytique par rapport à x et z dans un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^2$ et Gevrey d'ordre 1 par rapport à ε dans S ; ceci permet, entre autres, de traiter des équations comportant aussi un paramètre de contrôle et pour lesquelles apparaissent des canards.

On rappelle que l'ensemble lent \mathcal{L} est l'ensemble d'équation $\Phi(x, y, 0) = 0$ et qu'un point (\tilde{x}, \tilde{y}) de \mathcal{L} est dit régulier si $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}, 0) \neq 0$. Au voisinage d'un point régulier, d'après le théorème des fonctions implicites, \mathcal{L} est le graphe d'une fonction continue y_0 , dite lente, vérifiant $y_0(\tilde{x}) = \tilde{y}$. On note $f(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, z_0(x), 0)$. Lorsqu'on cherche à prolonger une telle fonction y_0 ,

deux situations peuvent se produire : ou bien on arrive au bord de D , ou bien on arrive à un point tournant, où f s'annule. *A priori* la fonction f a une singularité en un point tournant. Dans ce mémoire, nous nous plaçons dans la situation très particulière où f est définie et analytique dans un voisinage du point tournant.

Dans la partie 6.1, nous détaillons l'usage des DAC au voisinage d'un point régulier, où l'on retrouve les développements combinés classiques. Le cas d'un point tournant est présenté dans la suite, d'abord dans une situation simple, dite *quasi-linéaire* dans la partie 6.2, puis dans une situation plus délicate dans la partie 6.3.

6.1 DAC classiques en un point régulier.

On considère un problème aux valeurs initiales de la forme

$$\varepsilon y' = \Phi(x, y, \varepsilon), \quad y(\tilde{x}, \varepsilon) = v(\varepsilon) \quad (6.2)$$

avec les notations et hypothèses précédentes. On suppose de plus que v est Gevrey d'ordre 1 par rapport à $\varepsilon \in S$. On vérifie aisément qu'il existe une unique solution formelle $\hat{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} a_n(x) \varepsilon^n$ de l'équation (6.1) sans condition initiale avec des coefficients a_n analytiques au voisinage de \tilde{x} et avec $a_0 = y_0$, la fonction lente, c.f. la formule (6.3) ci-dessous. Il est aussi connu [5, 8] que cette solution formelle satisfait des estimations Gevrey d'ordre 1 en ε et que, de plus, une solution $y = y(x, \varepsilon)$ de (6.1) bornée dans un domaine de la forme $D_1 \times S$ avec $D_1 = D(\tilde{x}, r_0)$ (et $S = S(-\delta, \delta, \varepsilon_0)$) est asymptotique Gevrey-1 à \hat{y} dans tout sous-domaine $\tilde{D}_1 \times \tilde{S}$ (i.e. $\tilde{D}_1 = D(\tilde{x}, \tilde{r}_0)$ et $\tilde{S} = S(-\tilde{\delta}, \tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon}_0)$ avec $\tilde{r}_0 < r_0$, $\tilde{\delta} < \delta$ et $\tilde{\varepsilon}_0 < \varepsilon_0$).

Par ailleurs, il est également connu [39, 4] que la solution du problème aux valeurs initiales (6.2) admet un développement combiné de la forme $\sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x-\tilde{x}}{\varepsilon}\right) \right) \varepsilon^n$, où les a_n sont les coefficients de la solution formelle et où les g_n sont des fonctions à décroissance exponentielle. Le théorème 6.1 et le corollaire 6.3 permettent de retrouver ce résultat et de le généraliser au cadre complexe. Ils donnent en outre des estimations Gevrey de ces développements. Précisément, nous allons montrer que, si la condition initiale v est suffisamment proche de $\tilde{y} = y_0(\tilde{x})$, alors la solution du problème (6.2) admet un DAC Gevrey pour $\varepsilon \in S$ et pour x dans un domaine approprié. Le domaine en x pourra être choisi d'autant plus grand que v sera proche de \tilde{y} . Pour éviter d'avoir un énoncé trop compliqué, et aussi pour que les preuves ne soient pas trop longues, nous avons choisi d'écrire deux énoncés distincts.

Avant de présenter ces énoncés, nous faisons les réductions suivantes. Tout d'abord, en changeant y en $y - y_0$ on se ramène à $y_0 \equiv 0$. Enfin, une translation et une rotation de la variable x permettent de supposer $\tilde{x} = 0$ et $f(0) < 0$. Ceci nous permet de détailler un peu la solution formelle. Puisque

$\Phi(x, 0, 0) = 0$, la fonction Φ est de la forme $\Phi(x, y, \varepsilon) = y\Psi(x, y) + \varepsilon P(x, y, \varepsilon)$, avec Ψ et P analytiques (et $\Psi(x, 0) = f(x)$). Le coefficient du terme d'ordre $n+1$ en ε dans le développement de Taylor de $\Phi(x, \sum_{k \geq 1} a_k(x) \varepsilon^k, \varepsilon)$ est donc de la forme $f \cdot a_{n+1} + \phi_n$, où ϕ_n ne dépend que des termes a_0, \dots, a_n . Ainsi, la solution formelle est donnée récursivement par

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{f}(a'_n - \phi_n). \quad (6.3)$$

Le premier énoncé concerne des conditions initiales proches de la courbe lente. Par continuité de la dérivée partielle de Φ , la condition (6.4) sera réalisée si r_0, r_2 et ε_0 sont assez petits.

Théorème 6.1 . *Soit $\delta, \varepsilon_0, r_0, r_2 > 0$. On suppose que $\delta < \frac{\pi}{4}$ et que pour tout $|x| < r_0$, $|y| < r_2$ et $\varepsilon \in S(-\delta, \delta, \varepsilon_0)$*

$$\left| \arg \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, \varepsilon) - \pi \right| < \delta \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, \varepsilon) \right| \geq \frac{1}{2} |f(0)|. \quad (6.4)$$

Si $|v| < r_2$ sur S , alors la solution y de (6.2) admet un développement combiné Gevrey d'ordre 1 en ε , pour x dans le secteur $S' = S(-\frac{\pi}{2} + 2\delta, \frac{\pi}{2} - 2\delta, r_0)$ et pour ε dans S . La partie lente de ce développement est la solution formelle (6.3) et la partie rapide est constituée de fonctions g_n à décroissance exponentielle dans le secteur $S'' = S(-\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta, \infty)$.

Précisément, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g_n \in \mathcal{G}(S'')$ et des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que, pour tout $x \in D(0, r) \cap S'$, tout $\varepsilon \in S$ et tout entier $N > 0$

$$\left| y(x, \varepsilon) - \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_n(x) + g_n\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \varepsilon^n \right| \leq C_1 C_2^N N! |\varepsilon|^N. \quad (6.5)$$

De plus, il existe $C_3, C_4, C_5 > 0$ telles que, pour tout $X \in S''$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\begin{aligned} |g_n(X)| &\leq C_3 C_4^n (C_5 |X|)^{n+1/2} e^{-C_5 |X|} \text{ si } C_5 |X| \geq n, \\ |g_n(X)| &\leq C_3 C_4^n n! \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (6.6)$$

REMARQUES . 1. L'existence de ces développements combinés en un point régulier est classique dans le cadre réel. Les méthodes réelles peuvent s'adapter aisément au cadre complexe. En revanche, les estimations Gevrey sont nouvelles à notre connaissance. Nous pensons que ces estimations peuvent être utiles pour des questions conduisant à utiliser des développements combinés.

2. Les coefficients a_n sont ceux de la solution formelle, déterminés par (6.3); les coefficients g_n peuvent être obtenus directement à partir de l'équation *intérieure*, obtenue en posant $x = \varepsilon X$, $y(x) = Y(X)$. Rappelons les notations

$\Phi(x, y, \varepsilon) = y\Psi(x, y) + \varepsilon P(x, y, \varepsilon)$, avec Ψ et P analytiques et $\Psi(x, 0) = f(x)$. Introduisons aussi v_n , donné par $v(\varepsilon) = \sum_{n \geq 0} v_n \varepsilon^n$, et $\psi : Y \mapsto \Psi(0, Y)$. L'équation intérieure est

$$\frac{dY}{dX} = Y\Psi(\varepsilon X, Y) + \varepsilon P(\varepsilon X, Y, \varepsilon), \quad Y(0, \varepsilon) = v(\varepsilon).$$

La solution formelle de ce problème se calcule en résolvant successivement des équations différentielles avec condition initiale; ces équations sont linéaires non homogènes sauf la première. Pour le premier terme, on obtient

$$\frac{dY_0}{dX} = Y_0 \psi(Y_0), \quad Y_0(0) = v_0,$$

ce qui donne implicitement Y_0 par $\int_{v_0}^{Y_0(X)} \frac{du}{u\psi(u)} = X$, et pour les autres termes

$$Y_n' = A(X)Y_n + B_n(X), \quad Y_n(0) = v_n$$

avec $A = Y_0 \psi'(Y_0) + \psi(Y_0)$ et où B_n ne dépend que des termes Y_1, \dots, Y_{n-1} . On obtient

$$Y_n(X) = v_n e^{\int_0^X A} + \int_0^X e^{\int_u^X A} B_n(u) du.$$

Preuve. Soit $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq \frac{2\pi}{\delta}$, et pour $l = 0, \dots, N-1$, soit

$$S_l = S(\alpha_l, \beta_l, \eta_0) \text{ avec } \alpha_l = \frac{2(l-1)\pi}{N} \text{ et } \beta_l = \frac{2(l+1)\pi}{N}.$$

De cette manière, N est assez grand pour que $S_0 \subset S$. Soit $v_l : S_l \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction asymptotique Gevrey-1 à $\hat{v} = \sum_{n \geq 0} v_n \varepsilon^n$, dont l'existence est assurée par le théorème de Borel-Ritt-Gevrey (obtenue par exemple par transformation de Borel de \hat{v} et par transformation de Laplace tronquée, c.f. le début de la preuve du lemme 4.10). Au besoin en diminuant ε_0 , on peut supposer que ces fonctions v_l sont bornées par r_2 . Pour fixer les idées on peut choisir pour v_0 la restriction de v à S_0 , mais ce n'est pas indispensable. De même, soit $\Phi_l : D(0, r_0) \times D(0, r_2) \times S_l \rightarrow \mathbb{C}$ asymptotiques Gevrey-1 en ε à la même série que Φ .

Puisque les fonctions v_0, \dots, v_{N-1} et v sont asymptotiques Gevrey-1 à une même série, et de même pour $\Phi_0, \dots, \Phi_{N-1}$ et Φ , il existe $C, A > 0$ tels que pour tout $l \in \{0, \dots, N-1\}$, tout $x \in D(0, r_0)$, tout $y \in D(0, r_2)$ et tout $\varepsilon \in S_{l,l+1} = S_l \cap S_{l+1}$ on ait

$$|v_{l+1}(\varepsilon) - v_l(\varepsilon)| \leq C e^{-A/|\varepsilon|} \text{ et } |\Phi_{l+1}(x, y, \varepsilon) - \Phi_l(x, y, \varepsilon)| \leq C e^{-A/|\varepsilon|} \quad (6.7)$$

ainsi que

$$|v_l(\varepsilon) - v(\varepsilon)| \leq C e^{-A/|\varepsilon|} \text{ et } |\Phi_l(x, y, \varepsilon) - \Phi(x, y, \varepsilon)| \leq C e^{-A/|\varepsilon|}$$

pour $x \in D(0, r_0)$, $y \in D(0, r_2)$ et $\varepsilon \in S \cap S_l$ si cette intersection n'est pas vide. En vue d'appliquer le théorème 5.1, nous allons considérer deux familles $(y_l^1)_{0 \leq l < N}$ et

$(y_l^2)_{0 \leq l < N}$ de solutions d'équations similaires à (6.1), obtenues en remplaçant Φ par Φ_l . Ensuite nous vérifierons que les différences sont exponentiellement petites.

Concernant la première famille, pour chaque $l \in \{0, \dots, N-1\}$, soit y_l^1 la solution de condition initiale $y_l^1(0, \varepsilon) = v_l(\varepsilon)$. Alors, pour ε_0 suffisamment petit, y_l^1 est définie et bornée par r sur $S_l^1 \times S_l$, où $S_l^1 = S(\alpha_l^1, \beta_l^1, r_0)$, avec

$$\alpha_l^1 = \frac{\pi}{N} \left(2l - \frac{N}{2} + 4 \right) \text{ et } \beta_l^1 = \frac{\pi}{N} \left(2l + \frac{N}{2} - 4 \right).$$

Lemme 6.2 . On a, pour tout x dans l'intersection $S_{l,l+1}^1 = S_l^1 \cap S_{l+1}^1$ et tout ε dans $S_{l,l+1} = S_l \cap S_{l+1}$

$$|y_{l+1}^1(x, \varepsilon) - y_l^1(x, \varepsilon)| \leq C(1 + r_0)e^{-A/|\varepsilon|},$$

où A et C sont donnés dans (6.7).

De même, on a, pour tout x dans $S_l^1 \cap S'$ et tout ε dans $S_l \cap S$

$$|y_l^1(x, \varepsilon) - y(x, \varepsilon)| \leq C(1 + r_0)e^{-A/|\varepsilon|}.$$

Preuve. Posons $z_l = y_{l+1}^1 - y_l^1$, notons

$$b(x, \varepsilon) = \Phi_{l+1}(x, y_l(x, \varepsilon), \varepsilon) - \Phi_l(x, y_l(x, \varepsilon), \varepsilon),$$

rappelons la notation Δ_2 introduite dans (5.26), définie par

$$\Phi_{l+1}(x, z, \varepsilon) - \Phi_{l+1}(x, y, \varepsilon) = \Delta_2 \Phi_{l+1}(x, y, z, \varepsilon)(z - y)$$

et notons $d(x, \varepsilon) = \Delta_2 \Phi_{l+1}(x, y_l(x, \varepsilon), y_{l+1}(x, \varepsilon), \varepsilon)$. Puisque

$$\Delta_2 \Phi(x, y, z, \varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y + t(z - y), \varepsilon) dt,$$

l'hypothèse (6.4) entraîne $|\arg d(x, \varepsilon) - \pi| < \delta$.

Alors z_l est solution du problème aux valeurs initiales

$$\varepsilon z_l' = d(x, \varepsilon) z_l + \varepsilon b(x, \varepsilon), \quad z_l(0, \varepsilon) = v_{l+1}(\varepsilon) - v_l(\varepsilon).$$

Étant donné $x \in S_{l,l+1}^1$, choisissons pour chemin d'intégration le segment de 0 à x . La formule de variation de la constante donne, pour tout ξ sur ce chemin tel que z_l est définie sur $[0, \xi]$

$$z_l(\xi, \varepsilon) = z_l(0, \varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\xi d(u, \varepsilon) du \right) + \int_0^\xi b(u) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_u^\xi d(v, \varepsilon) dv \right) du.$$

Pour $\eta \in S_{l,l+1}$ et $u \in [0, x]$, donc a fortiori pour $u \in [0, \xi]$, on a

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{\varepsilon} d(u, \varepsilon) e^{i \arg u} \right) < 0,$$

ce qui implique que

$$|z_l(\xi, \varepsilon)| \leq |z_l(0, \varepsilon)| + \int_0^{\xi} |b(s e^{i \arg s})| ds \leq C(1 + r_0)e^{-A/|\varepsilon|}.$$

Le principe de majoration *a priori* entraîne alors que z_l est définie sur tout $[0, x]$ et satisfait la même majoration. La comparaison entre y et y_l^1 est similaire. \square

Suite de la preuve du théorème 6.1. À présent, construisons la deuxième famille. Fixons $\tilde{r}_0 \in]0, r_0[$. Pour chaque $l \in \{0, \dots, N-1\}$, soit $x_l = -\tilde{r}_0 e^{2l\pi i/N}$ et soit y_l^2 la solution de condition initiale $y_l^2(x_l, \varepsilon) = 0$.

Pour ε_0 suffisamment petit, y_l^2 est définie sur $D_l \times S_l$, où D_l est l'intersection du disque $D(0, r_0)$ et du secteur de sommet x_l et d'angles α_l^1 et β_l^1 , c.f. figure 6.1. Par

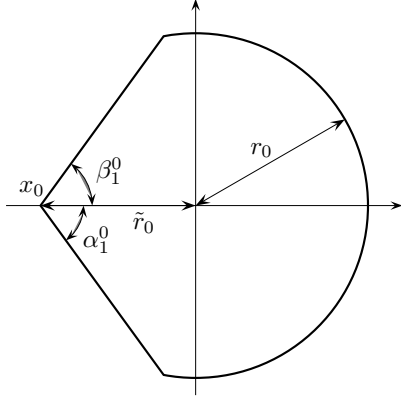


FIGURE 6.1 – En gras, le bord de D_l .

un argument similaire à la preuve du lemme 6.2, on montre que pour $x \in D_l \cap D_{l+1}$ et $\varepsilon \in S_{l,l+1}$, on a de même

$$|y_{l+1}^2(x, \varepsilon) - y_l^2(x, \varepsilon)| \leq C(1 + 2r_0)e^{-A/|\varepsilon|}.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème 5.1, il nous reste à montrer que les solutions y_l^1 et y_l^2 sont exponentiellement proches dans l'intersection de leur domaine d'existence $D_l \cap S_l^1 = S_l^1$. Leur différence $w = y_l^2 - y_l^1$ satisfait l'équation

$$\varepsilon w' = D(x, \varepsilon)w$$

où $D(x, \varepsilon) = \Delta_2 \Phi(x, y_l^1(x, \varepsilon), y_l^2(x, \varepsilon), \varepsilon)$, avec la condition initiale $w(0, \varepsilon) = y_l^2(0, \varepsilon) - y_l^1(0, \varepsilon)$. On a $|w(0, \varepsilon)| \leq 2r_2$; d'après (6.4), on a aussi $|\arg D(x, \varepsilon) - \pi| < \delta$ et $|D(x, \varepsilon)| \geq \frac{1}{2}|f(0)|$. Pour $x \in S_l^1$ tel que $|\arg x - \frac{2l\pi}{N}| < \frac{\pi}{3} - \delta$ et $\varepsilon \in S_l$, on obtient $|w(x, \varepsilon)| \leq 2r_2 e^{-B|x|/|\varepsilon|}$ avec $B = \frac{1}{4}|f(0)|$. À présent, les conditions sont réunies pour appliquer le théorème 5.1. Chacune des fonctions y_l^j , $j = 1$ ou 2 , $0 \leq l < N$, a donc un développement combiné Gevrey-1. Puisque la solution y est exponentiellement proche de y_l^1 sur $(S' \cap S_l^1) \times (S \cap S_l)$, elle aussi a un développement Gevrey.

De plus, puisque la solution formelle ne contient pas de pôles, c'est qu'elle coïncide avec le développement lent. Autrement dit, tous les coefficients g_{mn} sont nuls. Les fonctions du développement rapide g_n sont donc asymptotiques Gevrey-1 à la fonction nulle lorsque la variable X tend vers l'infini, donc à décroissance exponentielle.

Puisque les fonctions g_n admettent des développements asymptotiques Gevrey compatibles au sens de la définition 4.1, la formule (4.1) donne (6.6) avec un choix adéquat de l'entier M en fonction de n et de $|X|$. Précisément, si $C, L_1, L_2 > 0$ sont des constantes (de 4.1) telles que pour tout n, M et X (ici $p = 1$)

$$|X|^M |g_n(X)| \leq CL_1^n L_2^M \Gamma(M + n + 1),$$

on obtient (6.6) en utilisant la majoration $n! \leq n^{n+1/2} e^{1-n}$ et en choisissant $C_3 = eC$, $C_4 = L_1$, $C_5 = 1/L_2$ et pour l'entier M : $M = 0$ si $n \leq |X|/L_2$ et $M = \lceil |X|/L_2 \rceil - n$ sinon. \square

Le théorème 6.1 concernait une condition initiale proche de la courbe lente, mais nos résultats de prolongement des DAC permettent de traiter aussi le cas d'une condition initiale loin de la courbe lente.

Corollaire 6.3 . Avec les notations du théorème 6.1, on suppose que v_0 est dans le bassin d'attraction de 0 pour l'équation rapide

$$Y' = \Phi(0, Y, 0). \quad (6.8)$$

Alors il existe $\delta, \varepsilon_1 > 0$ tels que la solution y de (6.2) admet un développement combiné Gevrey d'ordre 1 en ε , pour x dans le secteur $S(-\delta, \delta, r_0)$ et pour ε dans $S = S(-\delta, \delta, \varepsilon_1)$.

Plus généralement, si $\alpha < 0 < \beta$ sont tels que v_0 est dans le bassin d'attraction de 0 pour l'équation $e^{-id}Y' = \Phi(0, Y, 0)$ pour tout $d \in [\alpha, \beta]$, alors la solution y de (6.2) admet un développement combiné Gevrey d'ordre 1 en ε , pour x dans le secteur $S(\alpha, \beta, r_0)$ et pour ε dans S .

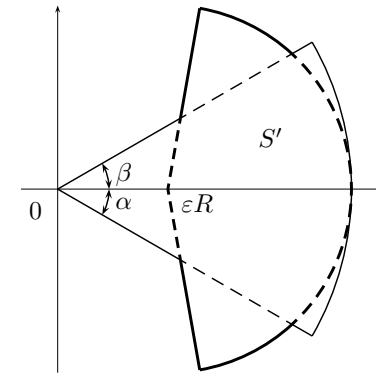


FIGURE 6.2 – Le secteur $S(\alpha, \beta, r_0)$ et le translaté S' du secteur $S(-\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta, r_0 - \varepsilon R)$.

Preuve. Tout d'abord, si v_0 est dans le bassin d'attraction de 0 pour l'équation rapide (6.8) et si δ est suffisamment petit, alors v_0 est aussi dans le bassin d'attraction

pour l'équation $e^{-id}Y' = \Phi(0, Y, 0)$ pour tout $|d| < \delta$. Il nous suffit donc de montrer la généralisation. Étant donnés r_0, r_2 tels que les hypothèses du théorème 6.1 soient satisfaites, puisque v_0 est dans le bassin d'attraction de 0, il existe $R > 0$ tel que $|w(\varepsilon)| < r_2$ pour tout $\varepsilon \in S$, avec $w(\varepsilon) = y(\varepsilon R, \varepsilon)$. Montrons d'abord que w a un développement Gevrey-1.

Soit $\varphi_R = \varphi_R(v, \varepsilon)$ l'application flot au temps R de l'équation intérieure, obtenue en posant $x = \varepsilon X$

$$\frac{dY}{dX} = \Phi(\varepsilon X, Y, \varepsilon). \quad (6.9)$$

La fonction φ_R est définie par $\varphi_R(v, \varepsilon) = Y_v(R, \varepsilon)$ si Y_v est la solution de (6.9) de condition initiale $Y_v(0, \varepsilon) = v$. D'après le théorème de dépendance des solutions par rapport aux paramètres et aux conditions initiales, φ_R est analytique par rapport à v et ε . Par hypothèse, $y(0, \varepsilon) = v(\varepsilon)$ a un développement Gevrey-1. Puisque la composée d'une fonction Gevrey-1 et d'une fonction analytique est Gevrey-1 (c.f. le début de la section 5.6), la fonction $w : \varepsilon \mapsto \varphi_R(v(\varepsilon), \varepsilon)$ est donc Gevrey-1. À présent nous appliquons le théorème 6.1 au problème

$$\varepsilon \frac{dz}{du} = \tilde{\Phi}(u, z, \varepsilon), \quad z(0, \varepsilon) = w(\varepsilon) \quad (6.10)$$

où l'on a posé $\tilde{\Phi}(u, z, \varepsilon) = \Phi(u + \varepsilon R, z, \varepsilon)$. La solution z , qui est reliée à y par $z(u, \varepsilon) = y(u + \varepsilon R, \varepsilon)$, a donc un DAC Gevrey-1, $\sum_{n \geq 1} \left(b_n(u) + h_n\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \right) \varepsilon^n$, pour u dans $S' = S\left(-\frac{\pi}{2} + 2\delta, \frac{\pi}{2} - 2\delta, r_0\right)$ et ε dans $S = S(-\delta, \delta, \varepsilon_0)$. D'après le théorème 5.7 (c.f. aussi la remarque 3 qui suit ce théorème) la solution y de (6.2) a aussi un DAC pour $\varepsilon \in S$ et $x \in V = V\left(-\frac{\pi}{2} + 3\delta, \frac{\pi}{2} - 3\delta, \mu|\varepsilon|, r_0 - R\varepsilon_0\right)$ avec $\mu = -R/\sin \delta$, si ε_0 est assez petit. Par ailleurs, d'après les hypothèses, la fonction y est définie pour x dans le secteur $S(\alpha, \beta, r_0)$. En utilisant à nouveau l'équation intérieure (6.9), l'analyticité du flot, et le fait que l'image d'une fonction Gevrey par une fonction analytique est Gevrey, on en déduit que y est Gevrey-1 sur $S(\alpha, \beta, r_0) \setminus V$. D'après la proposition 4.5, y a donc un DAC sur $S(\alpha, \beta, r_0)$. \square

6.2 DAC en un point tournant : le cas quasi-linéaire.

Dans cette partie, $r_0, r_2, \varepsilon_0, \delta > 0$ sont fixés avec $\delta > 0$ suffisamment petit, D_1 et D_2 sont les disques de centre 0 et de rayon respectivement r_0 et r_2 , et Σ désigne le secteur $\Sigma = S(-\delta, \delta, \varepsilon_0)$. On considère une équation de la forme

$$\varepsilon y' = px^{p-1}y + \varepsilon P(x, y, \varepsilon), \quad (6.11)$$

$x, y \in \mathbb{C}$, ε petit paramètre et P analytique bornée sur $D_1 \times D_2 \times \Sigma$ et Gevrey d'ordre 1 en ε dans Σ . Soit $\eta = \varepsilon^{1/p}$. Dans la suite, on utilisera parfois ε et η en même temps ; il est sous-entendu qu'on a toujours la relation $\varepsilon = \eta^p$.

L'équation (6.11) est appelée *quasi-linéaire*, car l'équation intérieure obtenue par $x = \eta X$, $Y(X) = y(\eta X)$, i.e. $\frac{dY}{dX} = pX^{p-1}Y + \eta P(\eta X, Y, \eta^p)$ se réduit à une équation linéaire homogène quand on remplace η par 0.

La forme générale de l'équation quasi-linéaire est obtenue en remplaçant px^{p-1} par une fonction $f(x)$ holomorphe dans un voisinage de 0 et ayant

un zéro d'ordre $p - 1$ en ce point. Cette forme peut être réduite à la *forme normale* (6.11) par un changement de variable (voir la remarque 8 dans la partie 6.2.4). Alternativement, on peut modifier les énoncés et les preuves de cette partie pour les adapter à cette forme générale. La description des domaines par rapport à x étant plus simple pour (6.11), nous avons choisi de présenter la théorie pour cette équation dans la suite.

Nous avons choisi une équation simple dépendant de ε , bien qu'on puisse traiter des équations plus générales (voir remarque 2 dans 6.2.4 et une généralisation dans la partie 6.3). Pour cette équation, deux preuves d'existence de solutions sont possibles. La première, décrite dans les parties 6.2.1 et 6.2.2, procède selon un modèle classique : on détermine d'abord une solution formelle combinée et on montre ensuite l'existence de solutions l'ayant comme DAC. La deuxième preuve utilise directement le théorème-clé 5.1 et montre l'existence d'un DAC Gevrey sans donner ses coefficients. Bien que la deuxième preuve soit plus courte, nous avons choisi de présenter la première car elle permet aussi de traiter des équations qui n'entrent pas dans le cadre de la deuxième preuve (par exemple des équations réelles C^∞ seulement) et pour lesquelles les DAC obtenus ne sont pas nécessairement Gevrey.

6.2.1 Solutions formelles combinées.

Soit $V = V(\alpha, \beta, \infty, \mu)$, où μ est un nombre réel positif ou négatif, et où α et β satisfont $-\frac{3\pi}{2p} < \alpha < 0 < \beta < \frac{3\pi}{2p}$. On rappelle que $\widehat{C}(r_0, V)$ désigne l'ensemble des séries formelles combinées associées à V et au disque D_1 . Nous introduisons aussi $\widetilde{C}(V)$, l'ensemble des séries formelles combinées associées à V et au disque D_1 où les coefficients a_n ne sont pas nécessairement bornés sur le disque. La motivation pour cette modification réside dans le fait qu'on ne sort pas du cadre en dérivant la partie lente d'un DAC ; nous n'aurons pas besoin de dériver de partie rapide. L'espace vectoriel $\widetilde{C}(V)$ muni de la distance ultramétrique (c.f. (3.6)) est un espace de Banach. De même on note $\widetilde{\mathcal{H}}$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans D_1 , non nécessairement bornées. Voici le résultat principal.

Théorème 6.4 . *Avec les notations précédentes, l'équation (6.11) a une unique solution formelle combinée \widehat{y} dans $\eta\widetilde{C}(V)$.*

Nous verrons dans la partie 6.2.3 que l'existence de cette solution formelle sera une conséquence directe de l'existence de solutions analytiques de (6.11) ayant un développement combiné. Cependant il nous a semblé instructif de présenter une preuve indépendante d'existence de cette solution formelle et d'une solution l'ayant comme DAC, qui évite le recours aux techniques développées dans la partie 5.

Le principe de la preuve est le suivant. On commence par résoudre l'équation linéaire non homogène

$$\varepsilon y' = px^{p-1}y + \varepsilon h(x, \eta) \quad (6.12)$$

où $h \in \tilde{C}(V)$. On démontre dans le lemme 6.7 qu'il existe une unique solution de (6.12) dans $\eta\tilde{C}(V)$, notée $\hat{\Phi}(h)$. En notant $\hat{\mathbf{Q}}$ l'opérateur qui, à une série formelle \hat{y} , associe la série formelle obtenue en substituant \hat{y} dans P , i.e. $\hat{\mathbf{Q}}(\hat{y})(x, \eta) = P(x, \hat{y}(x, \eta), \eta^p)$, on vérifie ensuite que l'équation

$$y = \hat{\Phi}(\hat{\mathbf{Q}}(y))$$

satisfait toutes les conditions d'application du théorème du point fixe de Banach dans $\tilde{C}(V)$.

Par linéarité, l'équation (6.12) se résout en développant h en série formelle combinée et en additionnant les solutions de chacune des équations ne contenant qu'un terme de la série. Il s'agit donc de résoudre (6.12) dans deux cas : lorsque la fonction h ne dépend que de x , i.e. $h \in \tilde{\mathcal{H}}$, et lorsque h ne dépend que de $X = \frac{x}{\eta}$, i.e. $h(x, \eta) = k(\frac{x}{\eta})$ avec $k \in \mathcal{G}(V)$. Nous commençons par le deuxième cas.

Lemme 6.5 . *Pour tout $k \in \mathcal{G}(V)$, l'équation*

$$\varepsilon y' = px^{p-1}y + \varepsilon k(\frac{x}{\eta}) \quad (6.13)$$

a une unique solution dans $\eta\mathcal{G}(V)$.

Preuve. Le changement d'inconnue $y(x, \eta) = \eta Y(\frac{x}{\eta}, \eta)$ aboutit à l'équation

$$\frac{dY}{dX} = pX^{p-1}Y + k(X).$$

Puisque V satisfait $-\frac{3\pi}{2p} < \alpha < 0 < \beta < \frac{3\pi}{2p}$, cette équation a pour unique solution bornée dans $\mathcal{G}(V)$

$$Y(X) = \exp(X^p) \int_{\infty}^X \exp(-t^p) k(t) dt$$

où le chemin d'intégration est dans V et sa partie assez loin de l'origine est une demi-droite $\{X_1 + t; t \in \mathbb{R}^+\}$ avec un certain $X_1 \in V$. \square

Pour résoudre (6.12) dans le premier cas $h \in \tilde{\mathcal{H}}$, nous utiliserons le lemme suivant. Bien qu'il soit relativement classique (des résultats similaires peuvent être trouvés par exemple dans les références [8, 5]), nous joignons une preuve pour la complétude du mémoire.

Lemme 6.6 . *Pour tout $h \in \tilde{\mathcal{H}}$, il existe une unique famille $(\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{p-2})$ de $p-1$ séries formelles en puissances de ε sans terme constant (i.e. $\hat{a}_l \in \varepsilon\mathbb{C}[[\varepsilon]]$) telle que l'équation*

$$\varepsilon y' = px^{p-1}y + \varepsilon h(x) + \sum_{l=0}^{p-2} \hat{a}_l x^l \quad (6.14)$$

ait une unique solution formelle \hat{u} sans terme constant en puissances de ε , à coefficients analytiques dans le disque $D_1 : \hat{u}(x, \varepsilon) = \sum_{\nu > 0} u_{\nu}(x) \varepsilon^{\nu}$, $u_{\nu} \in \tilde{\mathcal{H}}$.

Preuve. Injectons $\hat{u} = \sum_{\nu > 0} u_{\nu}(x) \varepsilon^{\nu}$ et $\hat{a}_l = \sum_{\nu > 0} a_{l\nu} \varepsilon^{\nu}$ dans (6.14), en tenant compte de la contrainte u_{ν} sans pôle en $x = 0$. En posant $h(x) = \sum_{\nu \geq 0} h_{\nu} x^{\nu}$, on obtient, en ce qui concerne le terme d'ordre 1 en ε :

$$0 = px^{p-1}u_1(x) + h(x) + \sum_{l=0}^{p-2} a_{l1} x^l,$$

d'où on déduit $a_{l1} = -h_l$ pour $l = 0, \dots, p-2$ et $u_1(x) = -\frac{1}{p} \sum_{\nu \geq 0} h_{\nu+p-1} x^{\nu}$, autrement dit, $u_1 = -\frac{1}{p} \mathbf{S}^{p-1} h$. Concernant le terme d'ordre n en ε pour $n \geq 2$, on obtient

$$u'_{n-1}(x) = px^{p-1}u_n(x) + \sum_{l=0}^{p-2} a_{ln} x^l,$$

La condition u_n sans pôle en $x = 0$ est satisfaite si et seulement si a_{ln} est le coefficient du terme de degré l dans le développement en série de u'_{n-1} , ce qui donne $u_n = \frac{1}{p} \mathbf{S}^{p-1} u'_{n-1}$. \square

Revenons à l'équation (6.12) avec $h \in \tilde{\mathcal{H}}$. Le changement d'inconnue $y = \hat{u} + z$, où \hat{u} est donné par le lemme 6.6, aboutit à l'équation

$$\varepsilon z' = px^{p-1}z - \sum_{l=0}^{p-2} \hat{a}_l x^l. \quad (6.15)$$

Par linéarité, il suffit de montrer que pour tout $l \in \{0, \dots, p-2\}$ il existe une unique solution dans $\eta\tilde{C}(V)$ de l'équation

$$\varepsilon z' = px^{p-1}z - \varepsilon x^l.$$

Le changement d'inconnue $z(x, \eta) = \eta^{l+1} Z(\frac{x}{\eta}, \eta)$ donne

$$Z' = pX^{p-1}Z - X^l$$

dont l'unique solution dans $\mathcal{G}(V)$ est donnée par

$$Z(X) = \exp(X^p) \int_X^{\infty} t^l \exp(-t^p) dt.$$

Ainsi, lorsque $h \in \tilde{\mathcal{H}}$, l'équation (6.12) a une unique solution dans $\eta\tilde{C}(V)$. En combinant avec le lemme 6.5, on obtient donc le résultat suivant.

Lemme 6.7 . *Pour tout $h \in \tilde{C}(V)$ il existe une unique solution de (6.12) dans $\eta\tilde{C}(V)$. Elle est notée $\hat{\Phi}(h)$. L'application $\hat{\Phi} : \tilde{C}(V) \rightarrow \eta\tilde{C}(V)$, $h \mapsto \hat{\Phi}(h)$ ainsi définie est contractante de rapport $\frac{1}{2}$.*

La contractance s'obtient simplement en utilisant la linéarité de l'équation (6.12).

Preuve du théorème 6.4. D'après la variante du lemme 3.2 pour $\tilde{C}(V)$ et le lemme précédent, l'application $\hat{\Phi} \circ \hat{\mathbf{Q}} : \eta\tilde{C}(V) \rightarrow \eta\tilde{C}(V)$ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$. Puisque $\eta\tilde{C}(V)$ est complet, cette application a donc un unique point fixe dans $\eta\tilde{C}(V)$. \square

REMARQUES . 1. Une autre façon de présenter le lemme 6.7 est de dire que la formule

$$\hat{\Phi}h(x, \eta) = \int_0^x \exp \left\{ \left(\frac{x}{\eta} \right)^p - \left(\frac{t}{\eta} \right)^p \right\} h(t, \eta) dt$$

définit un opérateur $\hat{\Phi}$ de $\tilde{C}(V)$ dans $\eta\tilde{C}(V)$.

2. La preuve du théorème montre que, comme pour le lemme 3.2, l'énoncé reste vrai si on suppose seulement que $P(x, y, \varepsilon)$ est une série formelle en ε et y , à coefficients dans $\tilde{C}(V)$.

3. En pratique, on ne calcule pas la solution formelle combinée de (6.11) de la manière suggérée par la preuve de théorème 6.4. Comme on sait qu'elle existe, on peut la calculer comme nous l'avons indiqué dans la remarque 3 qui suit la proposition 3.10 : on commence par déterminer les développements extérieur et intérieur, puis on rejette la partie polaire du développement extérieur pour obtenir le développement lent et la partie polynomiale du développement intérieur pour obtenir le développement rapide.

Le développement extérieur est donné par la solution formelle $\sum_{n \geq 1} v_n(x) \varepsilon^n$ de (6.11). Cette solution est à coefficients réguliers en dehors du point tournant 0 ; elle est donnée récursivement par

$$v_0(x) = 0, \quad v_{n+1}(x) = \frac{(v'_n - q_n)(x)}{px^{p-1}}$$

où q_n est le coefficient (dépendant de v_1, \dots, v_n) du terme d'ordre n en ε obtenu en développant par Taylor la fonction $\varepsilon \mapsto P(x, \sum_{1 \leq \nu < n} v_\nu(x) \varepsilon^\nu, \varepsilon)$.

Pour déterminer le développement intérieur, on pose dans (6.11) $x = \eta X$, $y(x) = Y(X)$ (avec $\eta^p = \varepsilon$) et on aboutit à l'équation intérieure

$$\frac{dY}{dX} = pX^{p-1}Y + \eta G(X, Y, \eta) \quad (6.16)$$

avec $G(X, Y, \eta) = P(\eta X, Y, \eta^p)$. On montre qu'il existe une unique solution formelle $\hat{Y} = \sum_{n \geq 1} V_n(X) \eta^n$ telle que toutes les $V_n(X)$ sont à croissance polynomiale quand $V \ni X \rightarrow \infty$. Cette solution formelle est déterminée récursivement par $V_0 = 0$ et en calculant l'unique solution à croissance polynomiale sur V de l'équation

$$\frac{dV_n}{dX} = pX^{p-1}V_n + G_n(X) \quad (6.17)$$

où G_n est le coefficient (dépendant de V_1, \dots, V_{n-1}) du terme d'ordre $n - 1$ en η obtenu en développant par Taylor la fonction $\eta \mapsto G(X, \sum_{1 \leq \nu < n} V_\nu(X) \eta^\nu, \eta)$. On trouve

$$V_n(X) = \int_{-\infty}^X \exp(X^p - s^p) G_n(s) ds.$$

6.2.2 Solutions analytiques et DAC.

Le but de cette partie est de montrer que l'équation (6.11) admet des solutions ayant des DAC ; c'est l'objet du théorème 6.10. Pour des raisons de commodités, nous présentons dans un premier temps un lemme qui sera utilisé à plusieurs reprises. Rappelons que les nombres $r_0, r_2, \varepsilon_0, \delta > 0$ ont été fixés au début de 6.2, avec $\varepsilon_0, \delta > 0$ suffisamment petit, que la variable $\varepsilon = \eta^p$ est dans le secteur $\Sigma = S(-\delta, \delta, \varepsilon_0)$ et que D_2 est le disque $D(0, r_2)$. On pose $\eta_0 = \varepsilon_0^{1/p}$. Le premier résultat que nous montrons est le suivant.

Lemme 6.8 . *On considère l'équation*

$$\eta^p y' = px^{p-1} + \eta^p Q(x, y, \eta) \quad (6.18)$$

avec $Q(x, u, \eta)$ analytique bornée dans l'ensemble des (x, u, η) tels que $u \in D_2$, $\eta \in S_0 := S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_0)$ et $x \in V_0(\eta) := V(\alpha, \beta, r_0, \mu|\eta|)$, où $\mu > 0$, $\alpha = -\frac{3\pi}{2p} + \frac{2\delta}{p}$ et $\beta = \frac{3\pi}{2p} - \frac{2\delta}{p}$. Soit $r_1 \in]0, r_0(\cos(2\delta))^{1/p}[$.

Alors il existe $\eta_1 > 0$ et une solution y de (6.18) définie dans l'ensemble des η, x tels que $\eta \in S_1 := S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_1)$ et $x \in V_1(\eta) := V(\alpha, \beta, r_1, \mu|\eta|)$. De plus, $y(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta)$ uniformément dans l'ensemble précédent.

REMARQUE . Dans cet énoncé, l'équation est quasi-linéaire et les solutions venant d'une montagne se prolongent dans un voisinage de 0 ; les quasi-secteurs peuvent donc être choisis avec $\mu > 0$. Dans la partie 6.3 ce ne sera plus le cas et nous aurons besoin de considérer des quasi-secteurs avec $\mu < 0$. C'est une des raisons pour lesquelles nous avons défini nos DAC sur des quasi-secteurs avec μ positif ou négatif, et non sur des secteurs.

Preuve. Nous construisons d'abord y pour $\eta \in S_0$ assez petit et x dans une partie Ω de $V_0(\eta)$, constituée du secteur $S(\alpha, \beta, r_1)$ et d'un petit "triangle curviligne" tangent à ce secteur. Nous montrerons ensuite que y se prolonge à $V_1(\eta) \setminus \Omega$ si μ est assez petit.

Soit $x_0 = r_1(\cos(2\delta))^{-1/p}$. La condition de l'énoncé sur r_1 entraîne que x_0 est bien dans $V_0(\eta)$ pour tout $\eta \in S_0$.

Notons Ω la réunion de $S(\alpha, \beta, r_1)$ et de l'intérieur du "triangle curviligne" dont l'image par

$$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto x^p \quad (6.19)$$

est le triangle de sommets $x_0^p, r_1^p e^{i2\delta}$ et $r_1^p e^{-2\delta i}$. Ce triangle image est isocèle en x_0^p et a les angles $2\delta, 2\delta$ et $\pi - 4\delta$. Le choix de x_0 est fait de telle sorte que les parties de

$\partial\Omega$ joignant x_0 aux points $r_1 e^{-2\delta i/p}$ et $r_1 e^{2\delta i/p}$ ont pour images par F des segments tangents au cercle de rayon r_1^p . Par construction, $V_1(\eta) \setminus \Omega$ est une partie du disque $D(0, \mu|\eta|)$. La raison pour avoir ajouté ce petit triangle est dans le résultat suivant.

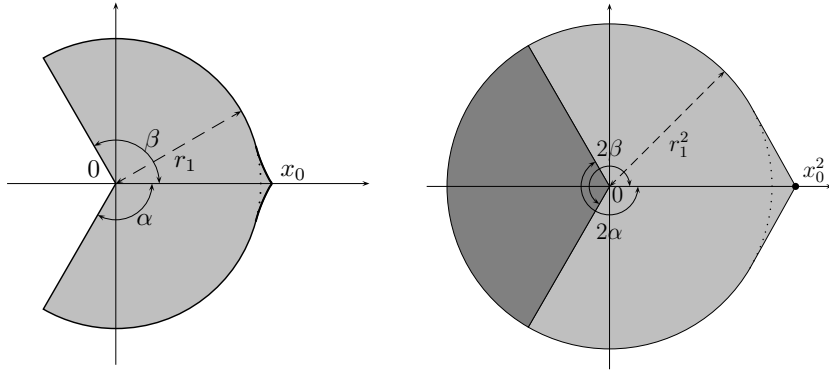


FIGURE 6.3 – À gauche dans le plan des x , à droite les images par $F : x \mapsto x^p$; ici $p = 2$. En gras, le bord de Ω . À droite, le secteur en gris foncé est couvert par deux feuilles de l'image de Ω .

Pour tout $|d| < \delta$, la région Ω est δ -descendante à partir de x_0 par rapport au relief

$$R_d : x \mapsto \operatorname{Re}(x^p e^{-id}) \quad (6.20)$$

dans le sens suivant : pour tout $x \in \Omega$, il existe un chemin γ de classe C^1 par morceaux, de longueur notée ℓ , joignant x_0 à x dans $\Omega \cup \{0, x_0\}$, paramétré par son abscisse curviligne, i.e. tel que $|\gamma'(t)| = 1$ pour tout $t \in [0, \ell]$, et tel que pour tout $t \in [0, \ell]$ et tout $d \in]-\delta, \delta[$

$$\operatorname{Re}(\gamma(t)^{p-1} \gamma'(t) e^{-id}) \leq -\sigma |\gamma(t)^{p-1}| \quad (6.21)$$

avec $\sigma = \sin \delta$. Cela signifie qu'en chaque point de γ , l'angle entre la tangente à γ et la direction de plus grande pente relativement à d est au plus $\frac{\pi}{2} - \delta$. Notons γ_x un tel chemin.

Par exemple, dans le cas où $|\arg x| \leq \frac{\pi}{p}$, on peut choisir γ_x de telle sorte que $\arg(x_0^p - \gamma_x(t)^p)$ soit constant et dans le cas où $|\arg x| > \frac{\pi}{p}$ on peut choisir pour chemin γ_x la réunion des segments $[x_0, 0]$ et $[0, x]$. Autrement dit, on peut choisir γ_x tel que $\gamma_x([0, \ell])^p = [x_0^p, 0] \cup [0, x^p]$ ou $[x_0^p, x^p]$, mais d'autres choix de γ_x sont possibles.

Soit \mathcal{E} l'espace de Banach des fonctions holomorphes z sur $\Omega \times S_1$ pour lesquelles il existe une constante Z telle que $|z(x, \eta)| \leq Z |\eta|$ pour tout (x, η) . Pour $z \in \mathcal{E}$, on définit $\|z\|$ comme étant la plus petites de ces constantes Z . Avec ρ à choisir convenablement, soit \mathcal{M} l'ensemble (non vide) des éléments z de \mathcal{E} de norme $\|z\| \leq \rho$.

Pour $z \in \mathcal{M}$, on pose

$$(Tz)(x, \eta) = e^{x^p/\eta^p} \int_{\gamma_x} e^{-\xi^p/\eta^p} P(\xi, z(\xi, \eta), \eta^p) d\xi. \quad (6.22)$$

Un point fixe y de T est bien une solution de (6.11) définie sur $\Omega \times S_1$ qui satisfait $y(x_0, \eta) = 0$.

On veut démontrer par le théorème du point fixe de Banach que T admet un point fixe dans \mathcal{M} , si η_1 est assez petit. Pour ceci et les généralisations de la partie 6.3, on montrera plus tard le lemme suivant.

Lemme 6.9 . Soit γ_x un chemin C^1 par morceaux joignant x_0 à x dans $\Omega \cup \{0, x_0\}$, paramétré par son abscisse curviligne et vérifiant (6.21). Pour tout $j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, il existe une constante $L_j > 0$ telle que

$$I_j(x, \eta) := \left| e^{x^p/\eta^p} \right| \int_{\gamma_x} \left| e^{-\xi^p/\eta^p} \right| |\xi|^j |d\xi| \leq L_j |\eta|^{j+1}$$

pour tout $x \in \Omega$, $\eta \in S_1$.

De plus, si on a $|\gamma_x(t)| \geq L |\eta|$ pour tout t , alors

$$I_j(x, \eta) \leq \frac{1}{p\sigma} L^{1+j-p} |\eta|^{j+1}$$

Ici $\int_{\gamma_x} |e^{-\xi^p/\eta^p}| |\xi|^j |d\xi|$ est une notation pour $\int_0^\ell |e^{-\gamma_x(t)^p/\eta^p}| |\gamma_x(t)|^j dt$, où ℓ est la longueur de γ_x ; rappelons que $|\gamma'_x(t)| = 1$.

Suite de la preuve du lemme 6.8. On choisit $\rho = L \sup |Q|$ dans la définition de \mathcal{M} . Remarquons d'abord que T est bien définie pour tout $z \in \mathcal{M}$, si η_1 est assez petit : il suffit que $\eta_1 \rho < r_2$. Alors, on a bien $|(Tz)(x, \eta)| \leq L |\eta| \sup |Q|$ quand $z \in \mathcal{M}$, $(x, \eta) \in \Omega \times S_1$. Ceci implique $T(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Notons maintenant

$$q(x, z_1, z_2, \varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial z}(x, z_1 + \tau(z_2 - z_1)) d\tau.$$

Alors $Q(x, z_2, \varepsilon) - Q(x, z_1, \varepsilon) = q(x, z_1, z_2, \varepsilon)(z_2 - z_1)$ pour tout $x \in D_1$, $z_1, z_2 \in D_2$ et $\varepsilon \in \Sigma$. Quitte à réduire r un peu, on peut supposer que q est bornée, disons par K . On obtient

$$|(Tz_2 - Tz_1)(x, \eta)| \leq \left| e^{x^p/\eta^p} \right| \int_{\gamma_x} \left| e^{-\xi^p/\eta^p} \right| K |z_2(\xi, \eta) - z_1(\xi, \eta)| |d\xi|$$

et donc $\|Tz_2 - Tz_1\| \leq LK\eta_1 \|z_2 - z_1\|$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathcal{M}$. Si η_1 satisfait aussi $LK\eta_1 < 1$, alors T est bien une contraction de \mathcal{M} et admet un point fixe (unique) dans \mathcal{M} .

Ceci montre l'existence de la solution y sur $\Omega \times S_1$ et que ses valeurs sont dans $D'(0, \rho|\eta|)$. Pour le prolongement analytique de y à $V_1(\eta) \setminus \Omega$, introduisons $Y(X, \eta) = y(\eta X, \eta)$. Elle satisfait l'équation différentielle intérieure

$$\frac{dY}{dX} = pX^{p-1}Y + \eta Q(\eta X, Y, \eta^p)$$

et prend une valeur $|Y(X_0, \varepsilon)| = \mathcal{O}(|\eta|)$ pour un $X_0 > 0$ petit arbitraire. Le théorème de dépendance par rapport aux conditions initiales et aux paramètres implique alors que Y est définie et prend des valeurs $\mathcal{O}(|\eta|)$ sur le disque $|X| \leq \mu$.

Ceci permet de prolonger y sur l'ensemble des (x, η) tels que $\eta \in S_1$ et $x \in V_1(\eta)$, avec $y(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta)$. \square

Preuve du lemme 6.9. Il s'agit de majorer

$$I_j(x, \eta) = \left| e^{x^p/\eta^p} \int_0^\ell \left| e^{-\gamma_x(t)/\eta^p} \right| |\gamma_x(t)|^j dt. \right|$$

On note $d = p \arg \eta$ et on introduit d'abord la variable $s = -\operatorname{Re}(\gamma_x(t)^p e^{-id})$. D'après (6.21), on a

$$\frac{ds}{dt} = -p \operatorname{Re}(\gamma_x(t)^{p-1} \gamma'_x(t) e^{-id}) \geq p \sigma |\gamma_x(t)|^{p-1}$$

avec $\sigma = \sin \delta$; de plus, on a $|\gamma_x(t)| \geq |s|^{1/p}$. En notant $\nu = \operatorname{Re}(x^p e^{-id})/\eta^p$, on obtient

$$I_j(x, \eta) \leq e^\nu \int_{-\operatorname{Re}(x_0^p e^{-id})}^{-\operatorname{Re}(x^p e^{-id})} e^{s/|\eta|^p} \frac{1}{p \sigma} |s|^{\frac{j+1}{p}-1} ds \leq \frac{|\eta|^{j+1}}{p \sigma} e^\nu \int_\nu^\infty e^{-u} |u|^{\frac{j+1}{p}-1} du$$

On majore enfin $e^\nu \int_\nu^\infty e^{-u} |u|^{\frac{j+1}{p}-1} du = \int_0^\infty e^{-\tau} |\tau + \nu|^{\frac{j+1}{p}-1} d\tau$ par $\Gamma(\frac{j+1}{p})$ si ν est positif et par $1 + \int_{\max(0, -\nu-1)}^{-\nu+1} |\tau + \nu|^{\frac{j+1}{p}-1} d\tau \leq 1 + \frac{2p}{j+1}$ si ν est négatif.

Pour la deuxième assertion, on utilise $|\gamma_x(t)| \geq L|\eta|$ à la place de $|\gamma_x(t)| \geq s^{1/p}$ et on l'obtient avec $I_j(x, \eta) \leq \frac{1}{p\sigma} L^{j+1-p} |\eta|^{j+1} e^\nu \int_\nu^\infty e^{-u} du$. \square

Maintenant nous sommes en position de montrer le résultat suivant. Les notations sont celles du début de la partie 6.2 : $\varepsilon = \eta^p$, $r_0, r_2, \varepsilon_0, \delta > 0$, $\Sigma = S(-\delta, \delta, \varepsilon_0)$, $D_1 = D(0, r_0)$ et $D_2 = D(0, r_2)$. Comme dans le lemme 6.8, on pose $\alpha = -\frac{3\pi}{2p} + \frac{2\delta}{p}$, $\beta = \frac{3\pi}{2p} - \frac{2\delta}{p}$ et on fixe $r_1 \in]0, r_0(\cos(2\delta))^{1/p}[$.

Théorème 6.10. *On considère l'équation (6.11) avec P analytique bornée dans $D_1 \times D_2 \times \Sigma$ et admettant un développement asymptotique uniforme quand $\Sigma \ni \varepsilon \rightarrow 0$.*

Alors, pour tout $\mu > 0$, il existe $\eta_1 > 0$ et une solution $y(x, \eta)$ de (6.11) définie pour $\eta \in S_1 = S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_1)$ et $x \in V(\eta) = V(\alpha, \beta, r_1, \mu|\eta|)$.

De plus y a un développement combiné quand $S_1 \ni \eta \rightarrow 0$ quand $x \in V(\eta)$.

Preuve. D'après le lemme 6.8, il existe une solution $y(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta)$ de (6.11) quand $\eta \in S_1$ et $x \in \tilde{V}(\eta) := V(\alpha, \beta, \tilde{r}_1, \mu|\eta|)$, si $r_1 < \tilde{r}_1 < r_0(\cos(2\delta))^{1/p}$. D'après le théorème 6.4, il existe aussi une solution formelle combinée de (6.11) $\hat{y} = \sum_{n \geq 0} (a_n(x) + g_n(\frac{x}{\eta})) \eta^n \in \hat{\mathcal{C}}(r_0, V(\alpha - \frac{\delta}{p}, \beta + \frac{\delta}{p}, \infty, \tilde{\mu}))$, avec un $\tilde{\mu} > \mu$.

À présent, fixons $N \in \mathbb{N}$ et choisissons $\tilde{r}_0 < r_0$ tel que $\tilde{r}_1 < \tilde{r}_0(\cos(2\delta))^{1/p}$. D'après le lemme 3.6 appliqué à la somme partielle $\hat{y}_N(x, \eta) = \sum_{n=1}^{N-1} (a_n(x) + g_n(\frac{x}{\eta})) \eta^n$, la fonction $r_N(x, \eta) := px^{p-1} \hat{y}_N(x, \eta) + \eta^p P(x, \hat{y}_N(x, \eta), \eta^p) - \eta^p \hat{y}'_N(x, \eta)$ admet un DAC quand $S_1 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in \tilde{V}(\eta) := V(\alpha, \beta, \tilde{r}_0, \mu|\eta|)$. Comme il s'agit

d'une somme partielle d'une solution formelle, les coefficients de η^j s'annulent pour $j = 0, \dots, N-1$. En particulier $r_N(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta^N)$ uniformément pour $x \in \tilde{V}(\eta)$.

On effectue alors le changement de variable $y = \hat{y}_N(x, \eta) + \eta^{N-p} z$ et on obtient pour z une équation de la forme $\eta^p z' = px^{p-1} z + \eta^p Q_N(x, z, \eta)$, avec $Q_N(x, z, \eta)$ bornée quand $|z| < Z$, $\eta \in S_1$ et $x \in \tilde{V}(\eta)$ avec un certain $Z > 0$. On applique le lemme 6.8 à cette équation : elle admet une solution $z_N(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta)$ quand $\eta \in S_N := S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_N)$, $x \in \tilde{V}(\eta)$ pour un certain $\eta_N > 0$.

On a donc montré que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe η_N et une solution $y_N(x, \eta)$ de (6.11) définie pour $\eta \in S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_N)$ et $x \in \tilde{V}(\eta)$ telle que $(y_N - \hat{y}_N)(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta^{N-p+1})$ uniformément sur $\tilde{V}(\eta)$. On montrera plus bas le lemme suivant.

Lemme 6.11. *Soit u_1 et u_2 deux solutions de (6.11) vérifiant $u_1(x, \eta)$, $u_2(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta)$ uniformément sur l'ensemble des (x, η) tels que $\eta \in S = S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_N)$, $x \in \tilde{V}(\eta)$. Alors u_1 et u_2 sont exponentiellement proches sur $V(\eta)$. Précisément, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\eta \in S$ et tout $x \in V(\eta)$*

$$|u_1(x, \eta) - u_2(x, \eta)| \leq C e^{-\kappa/|\eta|^p}.$$

avec $\kappa = (\tilde{r}_1^p - r_1^p) \cos(3\delta)$.

Fin de la preuve du théorème 6.10. Puisque la solution $y = y_0$ est exponentiellement proche de chacune des solutions y_N , si η est assez petit, ceci implique qu'elle admet un DAC pour $\eta \in S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_1)$ et $x \in V_0(\eta)$, ce qui termine la preuve du théorème 6.10. Quitte à changer les constantes, le rayon d'un secteur en η n'importe pas pour un DAC. \square

Preuve du lemme 6.11. Notons K une constante telle que $|u_j(x, \eta)| \leq K|\eta|$ pour $j = 1, 2$ et pour les (x, η) de l'hypothèse du lemme. Posons $z = u_1 - u_2$. Alors z est solution de l'équation

$$\eta^p z' = (px^{p-1} + \eta^p g(x, \eta)) z \quad (6.23)$$

avec $g(x, \eta) = \Delta_2 P(x, u_1(x, \eta), u_2(x, \eta), \eta^p)$, où — rappelons-le — $\Delta_2 P$ est défini par

$$P(x, z, \varepsilon) - P(x, y, \varepsilon) = \Delta_2 P(x, y, z, \varepsilon)(z - y). \quad (6.24)$$

Puisque la fonction P est bornée sur $D_1 \times D_2 \times S$, les inégalités de Cauchy montrent que $\Delta_2 P$ est bornée sur $D_1 \times D(0, K\tilde{\eta}) \times D(0, K\tilde{\eta}) \times S$ si $\tilde{\eta}$ est assez petit, donc $g(x, \eta)$ est bornée pour l'ensemble des (x, η) tels que $\eta \in \tilde{S} = S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \tilde{\eta})$ et $x \in \tilde{V}(\eta)$. Étant donnés $\eta \in \tilde{S}$ et $x \in V(\eta)$, choisissons $\tilde{x} = \tilde{r}_1 e^{i \arg x}$ si $|\arg x| < 2\delta$ et $\tilde{x} = \tilde{r}_1$ sinon. Posons $G(x, \eta) = \exp \int_{\tilde{x}}^x g(u, \eta) du$. A priori G n'est pas continue mais puisque g est bornée, c'est une fonction bornée. L'équation (6.23) donne, pour $\eta \in \tilde{S}$ et $x \in \tilde{V}(\eta)$

$$z(x, \eta) = z(\tilde{x}, \eta) G(x, \eta) \exp \left\{ \frac{1}{\eta^p} (x^p - \tilde{x}^p) \right\}.$$

Par les choix de $V(\eta)$, $\tilde{V}(\eta)$ et de \tilde{x} , on a pour tout $\eta \in \tilde{S}$ et tout $x \in V(\eta)$,

$$\operatorname{Re}(e^{-ip \arg \eta} (x^p - \tilde{x}^p)) < (r_1^p - |\tilde{x}|^p) \cos(3\delta) = -\kappa \text{ si } |\arg x| < 2\delta$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(e^{-ip \arg \eta} (x^p - \tilde{x}^p) \right) &< r_1^p \cos \delta - |\tilde{x}|^p \cos(|\arg x| - \delta) \\ &< (r_1^p - |\tilde{x}|^p) \cos \delta < -\kappa \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Il existe donc une constante C telle que $|z(x, \eta)| \leq C \exp(-\kappa/|\eta|^p)$ pour ces valeurs de (x, η) . Quitte à augmenter la constante, cette majoration reste valable quand $\eta \in S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_N)$ et $x \in V(\eta)$, i.e. pour $|\eta| \geq \eta_1$. \square

6.2.3 Le caractère Gevrey des DAC.

On montre que le DAC de la solution de théorème 6.10 est Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ au sens de la définition 4.3. Le théorème-clé 5.1 se révèle particulièrement bien adapté pour obtenir ce résultat. Le principe de la la preuve est le suivant : nous construisons d'abord des solutions pour ε et x dans un recouvrement cohérent, puis nous montrons que ces solutions sont exponentiellement proches les unes des autres (c.f. lemme 6.13). Précisément, lorsqu'on change d'un secteur en ε à l'autre, les deux solutions sont sur une même montagne, donc leur différence est exponentiellement petite de la forme $\exp(-\alpha/|\varepsilon|)$. En revanche, lorsqu'on change de secteur en x , les solutions sont définies sur deux montagnes adjacentes et il faut alors descendre dans la vallée les séparant pour qu'elle deviennent exponentiellement proches. Leur différence est donc de la forme $\exp(-\alpha|x^p/\varepsilon|)$. Il se trouve que les estimations obtenues correspondent exactement aux conditions d'application du théorème 5.1. Il nous semble difficile de démontrer ce résultat directement, i.e. dans l'esprit des sous-sections précédentes.

Théorème 6.12 . *On considère l'équation (6.11) avec les hypothèses et notations de théorème 6.10.*

Alors, pour chaque $k = 0, \dots, p-1$, il existe $\mu, \eta_1 > 0$ et une solution y de (6.11) définie pour $\eta \in S_1 := S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_1)$ et $x \in V_k(\eta) = V(\alpha_k, \beta_k, r_1, \mu|\eta|)$ avec $\alpha_k = -\frac{3\pi}{2p} + \frac{2\delta}{p} + \frac{2k\pi}{p}$ et $\beta_k = \frac{3\pi}{2p} - \frac{2\delta}{p} + \frac{2k\pi}{p}$.

De plus y a un développement combiné Gevrey d'ordre $1/p$.

Preuve. Dans une première étape, nous construisons une famille de fonctions (y_l^j) , solutions d'équations proches de (6.11), où la fonction P est remplacée par des fonctions P_m ayant la même asymptotique Gevrey-1 que P pour ε dans un recouvrement $(\Sigma_m)_{0 \leq m < M}$. Nous vérifions ensuite que les différences de ces fonctions y_l^j satisfont les estimations exponentielles requises pour appliquer le théorème 5.1. Au cours de la preuve, nous verrons que les fonctions P_m peuvent être construites comme des fonctions de x et ε , mais que les solutions y_l^j devront être définies comme des fonctions de x et de la variable $\eta = \varepsilon^{1/p}$.

Commençons par considérer un recouvrement $(\Sigma_m)_{0 \leq m < M}$ du disque épointé $D(0, \varepsilon_1)^* = D(0, \varepsilon_1) \setminus \{0\}$. Soit $M \in \mathbb{N}$ suffisamment grand ; en particulier il nous

faut $4\pi \leq M\delta$. Pour $0 \leq m < M$, soit $\Sigma_m = S(\frac{2\pi(m-1)}{M}, \frac{2\pi(m+1)}{M}, \varepsilon_1)$. Par une transformation de Borel et Laplace tronquée (c.f. la preuve du lemme 4.10) on construit sur chaque secteur Σ_m une fonction P_m bornée et ayant la même asymptotique Gevrey-1 que P .

Nous avons besoin de faire un tour complet dans la variable η , ce qui correspond à p tours dans la variable ε . Ainsi, au recouvrement $(\Sigma_m)_{0 \leq m < M}$ de $D(0, \varepsilon_1)^*$ correspond un recouvrement (S_l) de $D(0, \eta_1)^*$, avec $\eta_1 = \varepsilon_1^{1/p}$, de la façon suivante.

Soit $L = pM$. Pour $0 \leq l < L$, on pose $\varphi_l = l\frac{2\pi}{L}$, $\alpha_l = \varphi_l - \frac{2\pi}{L} (= \varphi_{l-1})$, $\beta_l = \varphi_l + \frac{2\pi}{L} (= \varphi_{l+1})$ et

$$S_l = S(\alpha_l, \beta_l, \eta_1) = S((l-1)\frac{2\pi}{L}, (l+1)\frac{2\pi}{L}, \eta_1).$$

Ainsi l'image de S_l par l'application $F : \eta \mapsto \eta^p$ est le secteur $\Sigma_{l \bmod M}$. On étend la famille (P_m) par "clonage" : pour $l \in \{M, \dots, L-1\}$, on pose $P_l = P_{l \bmod M}$.

Pour $j \in \{0, \dots, p-1\}$, soit $V^j = V(\alpha^j, \beta^j, \infty, \mu)$ avec $\alpha^j = j\frac{2\pi}{p} - \frac{3\pi}{2p} + \frac{3\delta}{p}$, $\beta^j = j\frac{2\pi}{p} + \frac{3\pi}{2p} - \frac{3\delta}{p}$ et $\mu > 0$ assez petit. Ainsi, dès que $\delta < \frac{\pi}{8}$, on a

$$\beta_l - \alpha_l = \frac{4\pi}{L} \leq \frac{\delta}{p} < \frac{\pi - 6\delta}{2p} = \frac{1}{2}(\beta^j - \alpha^{j+1}).$$

À partir de ces secteurs S_l et quasi-secteurs infinis V^j , on construit un bon recouvrement cohérent de finesse $\leq \frac{\delta}{p}$ en considérant le quasi-secteur $V_l^j(\eta) = V(\alpha_l^j, \beta_l^j, r_1, \mu|\eta|)$ avec

$$\alpha_l^j = \alpha^j + \varphi_l + \frac{\delta}{p} = \frac{2j\pi}{p} + \frac{2l\pi}{L} - \frac{3\pi}{2p} + \frac{4\delta}{p}, \quad \beta_l^j = \beta^j + \varphi_l - \frac{\delta}{p} = \frac{2j\pi}{p} + \frac{2l\pi}{L} + \frac{3\pi}{2p} - \frac{4\delta}{p}.$$

Pour simplifier la suite de la présentation, nous ne considérerons les variables X et x que dans des secteurs. Les modifications à apporter pour les quasi-secteurs seront présentées à la fin de la preuve. Précisément on considère X dans le secteur $S^j = S(\alpha^j, \beta^j, \infty)$ et x dans le secteur $\tilde{S}_l^j = S(\tilde{\alpha}_l^j, \tilde{\beta}_l^j, r_1)$ avec

$$\tilde{\alpha}_l^j = \alpha_l^j - \frac{2\delta}{p} = \frac{2j\pi}{p} + \frac{2l\pi}{L} - \frac{3\pi}{2p} + \frac{2\delta}{p}, \quad \tilde{\beta}_l^j = \beta_l^j + \frac{2\delta}{p} = \frac{2j\pi}{p} + \frac{2l\pi}{L} + \frac{3\pi}{2p} - \frac{2\delta}{p}.$$

Le secteur \tilde{S}_l^j est bissecté par $2\pi(\frac{j}{p} + \frac{l}{L})$ et de demi-ouverture $\frac{3\pi}{2p} - \frac{2\delta}{p}$. On note $S_{l,l+1} = S_l \cap S_{l+1}$ et similairement $\tilde{S}_{l,l+1}^{j,j+1}$ et $\tilde{S}_{l,l+1}^j$. Pour $\eta \in S_l$, le secteur \tilde{S}_l^j contient essentiellement la partie à distance $< r_1$ de la j -ième montagne du relief R_d donné par (6.20) avec $d = \arg \varepsilon = p \arg \eta$, et presque toutes les deux vallées adjacentes. L'intersection $\tilde{S}_{l,l+1}^{j,j+1}$ contient, quant à elle, une grande partie de la vallée entre les montagnes j et $j+1$. En particulier, on a pour tout $x \in \tilde{S}_{l,l+1}^{j,j+1}$ et tout $\eta \in S_l$,

$$|(2j+1)\pi - p \arg \frac{x}{\eta}| < \frac{\pi}{2} - 2\delta. \quad (6.25)$$

Soit $x_l^j = r_1(\cos(2\delta))^{-1/p} \exp\{2\pi i(\frac{j}{p} + \frac{l}{L})\}$. On constate que x_l^j est sur la bissectrice de \tilde{S}_l^j . Choisissons pour y_l^j la solution de l'équation

$$\eta^p y' = p x^{p-1} y + \eta^p P_l(x, y, \eta^p). \quad (6.26)$$

de condition initiale $y_l^j(x_l^j, \eta) = 0$.

En ramenant le présent cas à celui traité dans la démonstration du lemme 6.8 par des rotations de η et de x , on obtient que y_l^j est définie et bornée par $\rho \varepsilon_1^{1/p}$ avec un certain $\rho < r$ dans $\Omega_l^j \times S_l$, où Ω_l^j contient le secteur \tilde{S}_l^j et un petit triangle curviligne tangent à \tilde{S}_l^j et ayant un sommet en x_l^j .

Lemme 6.13 . *Il existe des constantes $C, A, B > 0$ telle que, pour chaque $(j, l) \in \{1, \dots, J\} \times \{1, \dots, L\}$, on ait les majorations*

$$\left| y_{l+1}^j(x, \eta) - y_l^j(x, \eta) \right| \leq C \exp \left(- \frac{A}{|\eta|^p} \right) \text{ sur } \tilde{S}_{l,l+1}^j \times S_{l,l+1}, \quad (6.27)$$

$$\left| y_l^{j+1}(x, \eta) - y_l^j(x, \eta) \right| \leq C \exp \left(- B \left| \frac{x}{\eta} \right|^p \right) \text{ sur } \tilde{S}_l^{j,j+1} \times S_l. \quad (6.28)$$

Preuve. Commençons par la majoration (6.28) et posons $z = y_l^{j+1} - y_l^j$. Alors z est solution de l'équation

$$\eta^p z' = (px^{p-1} + \eta^p g(x, \eta))z \quad (6.29)$$

avec $g(x, \eta) = \Delta_2 P_l(x, y_l^j(x, \eta), y_l^{j+1}(x, \eta), \eta^p)$, Δ_2 défini dans (6.24). Puisque la fonction P est bornée sur $D_1 \times D_2 \times S$, les inégalités de Cauchy montrent que $\Delta_2 P$ est bornée sur $D_1 \times D(0, \rho \varepsilon_1^{1/p}) \times D(0, \rho \varepsilon_1^{1/p}) \times S$ si ε_1 est assez petit. Posons $G(x, \eta) = \exp \int_0^x g(u, \eta) du$. C'est une fonction bornée sur $D_1 \times S$ par un certain $C_1 > 0$. L'équation (6.29) donne, pour $x \in S_l^{j,j+1}$ et $\eta \in S_l$

$$z(x, \eta) = z(0, \eta) G(x, \eta) \exp \left\{ \left(\frac{x}{\eta} \right)^p \right\}.$$

En utilisant (6.25), on obtient (6.28) avec $B = \sin(2\delta)$ et tout $C \geq 2\rho \varepsilon_1^{1/p} C_1$.

Concernant la majoration (6.27), on pose $w = y_{l+1}^j - y_l^j$. Alors w est solution de l'équation

$$\eta^p w' = (px^{p-1} + \eta^p h(x, \eta))w + \eta^p Q(x, \eta) \quad (6.30)$$

avec

$$h(x, \eta) = \Delta_2 P_{l+1}(x, y_l^j(x, \eta), y_{l+1}^j(x, \eta), \eta^p)$$

et

$$Q(x, \eta) = P_{l+1}(x, y_l^j(x, \eta), \eta^p) - P_l(x, y_l^j(x, \eta), \eta^p).$$

Posons $H(x, \eta) = \exp \int_0^x h(u, \eta) du$. C'est une fonction bornée supérieurement par K et inférieurement par $\frac{1}{K}$ pour un certain $K > 0$. Soit $\xi \in \partial \Omega_{l,l+1}^j$ avec $\arg \xi$ bissectant $S_{l,l+1}^j$; ainsi ξ est de la forme $\xi = r_3 \exp \left(2\pi i \left(\frac{l}{p} + \frac{l+1/2}{L} \right) \right)$ avec $r_3 > r_1$ (on trouve $r_3 = r_1 \cos \left(2\delta - \frac{\pi}{M} \right)^{-1/p}$). La formule de variation de la constante donne, pour tout $x \in S_{l,l+1}^j$

$$\begin{aligned} w(x, \eta) &= w(\xi, \eta) \exp \left\{ \left(\frac{x}{\eta} \right)^p - \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^p \right\} \frac{H(x, \eta)}{H(\xi, \eta)} + \\ &\quad \int_{\xi}^x \exp \left\{ \left(\frac{s}{\eta} \right)^p - \left(\frac{s}{\eta} \right)^p \right\} \frac{H(x, \eta)}{H(s, \eta)} Q(s, \eta) ds. \end{aligned} \quad (6.31)$$

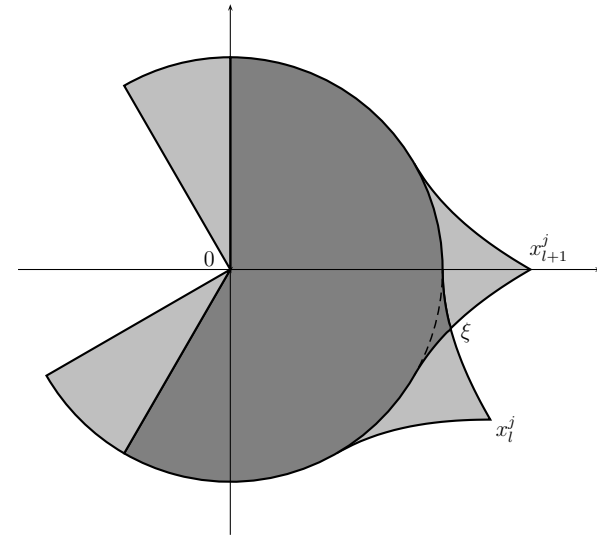


FIGURE 6.4 – Un dessin caricatural des domaines Ω_l^j et Ω_{l+1}^j et du point ξ .

où le chemin d'intégration est choisi descendant pour le relief R_d donné par (6.20) pour tout $d \in]\frac{2l\pi}{M}, \frac{2(l+1)\pi}{M}[$.

Concernant le premier terme de (6.31), on a $|w(\xi, \eta)| < 2r_2$ et $\left| \frac{H(x, \eta)}{H(\xi, \eta)} \right| \leq K^2$. De plus, pour tout $x \in S_{l,l+1}^j$ et tout $d \in]\frac{2l\pi}{M}, \frac{2(l+1)\pi}{M}[$, on a $\operatorname{Re}(x^p e^{-id}) - \operatorname{Re}(\xi^p e^{-id}) \leq -A_1$ avec $A_1 = r_3 \cos(\frac{\pi}{M}) - r_1$, donc $\left| \exp \left\{ \left(\frac{x}{\eta} \right)^p - \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^p \right\} \right| \leq \exp \left(- \frac{A_1}{|\eta|^p} \right)$ pour tout $x \in S_{l,l+1}^j$ et tout $\eta \in S_{l,l+1}$. La condition $A_1 > 0$ est assurée par le fait que $4\pi \leq M\delta$.

Concernant le deuxième terme de (6.31), les fonctions P_l et P_{l+1} sont asymptotiques Gevrey-1 à la même série, donc il existe $C_2, A_2 > 0$ tels que pour tout $x \in S_{l,l+1}^j$ et tout $\eta \in S_{l,l+1}$, $|Q(x, \eta)| \leq C_2 \exp \left(- \frac{A_2}{|\eta|^p} \right)$. Le chemin étant choisi descendant, on a, pour tout s sur ce chemin, tout $\eta \in S_{l,l+1}$ et tout $d \in]\frac{2l\pi}{M}, \frac{2(l+1)\pi}{M}[$, $\operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{x}{\eta} \right)^p - \left(\frac{s}{\eta} \right)^p \right\} \leq 0$. On obtient ainsi

$$|w(x, \eta)| \leq 2r_2 K^2 \exp \left(- \frac{A_1}{|\eta|^p} \right) + (r_1 + r_3) K^2 C_2 \exp \left(- \frac{A_2}{|\eta|^p} \right),$$

ce qui donne (6.27) avec $A = \min(A_1, A_2)$ et tout $C \geq (2r_2 + (r_1 + r_3)C_2)K^2$. \square

Suite de la preuve du théorème 6.12. Quitte à diminuer μ , les solutions y_l^j se prolongent pour x dans le disque $D(0, \mu|\eta|)$, donc pour x dans V_l^j . Quitte à augmenter la constante C , les inégalités (6.27) et (6.28) restent valides lorsque x est dans V_l^j . Toutes les conditions sont réunies à présent pour appliquer le théorème 5.1, ce qui entraîne que les fonctions y_l^j ont toutes un DAC Gevrey. En particulier, pour chaque $k \in \{0, \dots, p-1\}$, la solution $y = y_0^k$ répond à la question. \square

6.2.4 Remarques et extensions.

1. Un corollaire direct du théorème 6.12 est qu'il existe une solution formelle de (6.11), et que cette solution formelle est Gevrey d'ordre $1/p$ en η . En d'autres termes, cela fournit une autre preuve du théorème 6.4.

2. Le théorème 6.12 est valable dans le cas un peu plus général où P est une fonction de la variable η , Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ en η , au lieu de la variable ε .

3. Le relief de l'équation (6.11) pour $\arg \eta = 0$ est constitué d'une succession de p montagnes et p vallées correspondant aux secteurs $S(\frac{2k\pi}{p} - \frac{\pi}{2p}, \frac{2k\pi}{p} + \frac{\pi}{2p}, r_0)$, respectivement $S(\frac{2k\pi}{p} + \frac{\pi}{2p}, \frac{2k\pi}{p} + \frac{3\pi}{2p}, r_0)$, $k = 1, \dots, p$. Nous avons montré l'existence d'une solution sur une montagne et deux vallées adjacentes ayant un DAC. On peut en déduire que toute solution y de (6.11) de condition initiale $y(x_1) = y_1$ suffisamment petite, en un point x_1 sur une montagne, est définie et possède un DAC pour η d'argument petit et pour x dans la partie de la montagne en dessous de x_1 , dans la majeure partie des deux vallées adjacentes et dans un voisinage de l'ordre de η du point tournant 0.

Précisément, étant donné un tel point $x_1 \neq 0$ avec $a = \frac{2k\pi}{p} - \frac{\pi}{2p} < \arg(x_1) < b = \frac{2k\pi}{p} + \frac{\pi}{2p}$, soit $\delta > 0$ tel que $2\delta < \min\{\arg(x_1) - a, b - \arg(x_1)\}$ et soit Ω l'ensemble des $x \in D(0, x_0)$ accessibles depuis x_1 par un chemin δ -descendant pour le relief R_d donné par (6.20), pour tout $d \in]-\delta, \delta[$. La même preuve que la première étape de la preuve du théorème 6.12 montre que y est définie pour $\eta \in S(-\delta, \delta, \eta_0)$ et $x \in \Omega \cup D(0, K|\eta|)$ pour η_0 et K assez petits, et un argument analogue à celui pour la preuve de (6.28) montre que y est exponentiellement proche de la solution, notée ici \tilde{y} , donnée par le théorème 6.12 en tout point x de Ω suffisamment loin de x_1 , avec un coefficient dans l'exponentielle donné par $\min_{|d| \leq \delta} \{R_d(x_1) - R_d(x)\}$. Avec la proposition 4.8 (a) "réciproque", il est alors immédiat que y admet le même DAC que \tilde{y} .

4. La région Ω précédente ne contient que des parties d'une montagne et de deux vallées adjacentes, mais en réalité la solution y se prolonge aussi à de grandes parties de toutes les autres vallées. En effet, une modification de la preuve du théorème 6.10 montre que y se prolonge dans chacun des secteurs $S(\frac{2j\pi}{p} + \frac{\pi}{2p} + \frac{2\delta}{p}, \frac{2j\pi}{p} + \frac{3\pi}{2p} - \frac{2\delta}{p}, r)$. Il se pose la question si ces prolongements admettent des DAC ; on montre ci-dessous que ceci est vrai et que les coefficients rapides de ces DAC sont les prolongements analytiques de ceux du théorème 6.10 dans les autres vallées.

5. Plus généralement, soit maintenant \tilde{y} une solution de (6.11) de condition initiale $\tilde{y}(0, \eta) = u_0(\eta)$, où $u_0 : S = S(-\gamma, \gamma, \eta_0) \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma > 0$ assez petit³,

3. D'autres arguments de η peuvent être ramenés à ce cas par des rotations $x = \xi e^{i\varphi}$. Si on veut un secteur de plus grande ouverture en η , on le recouvre par de petits secteurs en η et on passe à l'intersection des secteurs en x correspondants. On peut considérer une

satisfait $\sup_S |u_0| \leq \tilde{r} < r$ et admet un développement asymptotique $\hat{u}_0(\eta)$ Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ quand $\eta \rightarrow 0$. Comme dans la remarque précédente et comme dans la preuve du théorème 6.10, on montre que $\tilde{y}(x, \eta)$ se prolonge dans $D(0, K|\eta|) \cup \bigcup_j S_j$ avec $K > 0$ et les secteurs S_j précédents, quand $\eta \in S(\alpha, \beta, \eta_1)$, si $\eta_1 > 0$ est assez petit. Cette solution \tilde{y} diffère dans S_j des deux solutions données par théorème 6.10 venant des montagnes adjacentes par une quantité de l'ordre $\mathcal{O}(e^{-B|x|^p/|\eta|^p})$, mais ceci ne suffit pas pour montrer que \tilde{y} admet un DAC. En effet la réciproque de la proposition 4.8 (b) est fausse. Nous sommes amenés à utiliser de nouveau le théorème 5.1, ce que nous faisons ci-dessous de manière concise selon le modèle de la preuve du théorème 6.12.

D'abord on utilise les secteurs S_l , $l = 1, \dots, L$ en η de cette preuve et on construit sur chaque S_l des fonctions P_l et u_{0l} avec même asymptotique Gevrey que P , resp. u_0 . On note \tilde{y}_l la solution de $\eta^p y' = p x^{p-1} y + \eta^p P_l(x, y, \eta^p)$ de condition initiale $\tilde{y}_l(0, \eta) = u_{0l}(\eta)$ quand $\eta \in S_l$. On réduit les V^j presque aux montagnes : $V^j = V(\alpha^j, \beta^j, \infty, \mu)$ avec $\alpha^j = j\frac{2\pi}{p} - \frac{\pi}{2p} - \frac{4\delta}{p}$, $\beta^j = j\frac{2\pi}{p} + \frac{\pi}{2p} + \frac{4\delta}{p}$ et $\mu > 0$ assez petit. On complète en un recouvrement de \mathbb{C} par les quasi-secteurs $\tilde{V}^j = V(\tilde{\alpha}^j, \tilde{\beta}^j, \infty, \mu)$, avec $\tilde{\alpha}^j = j\frac{2\pi}{p} + \frac{\pi}{2p} + \frac{\delta}{p}$ et $\tilde{\beta}^j = (j+1)\frac{2\pi}{p} - \frac{\pi}{2p} - \frac{\delta}{p}$. Ainsi \tilde{V}^j a une intersection non vide avec V^j et V^{j+1} . Comme dans la preuve du théorème 6.12, on associe les quasi-secteurs V_l^j et \tilde{V}_l^j à ces S_l , V^j , \tilde{V}^j et on obtient ainsi un bon recouvrement cohérent.

De manière analogue à \tilde{y} , la solution \tilde{y}_l se prolonge analytiquement dans l'union des \tilde{V}_l^j , $j = 1, \dots, p$; on note \tilde{y}_l^j sa restriction à \tilde{V}_l^j . Dans V_l^j , on considère les (restrictions des) solutions y_l^j de la démonstration du théorème 6.12. On montre de manière analogue à cette démonstration que des majorations analogues au lemme 6.13 sont satisfaites et donc le théorème 5.1 peut être appliqué. On en déduit que $\tilde{y}(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \hat{\tilde{y}}(x, \eta) := \sum_{n \geq 0} \left(a_n(x) + \tilde{g}_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$ admet un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ dans chacun des S_j . Ici $a_0(x) = 0$ et $\hat{\tilde{y}}(x, \eta)$ est la solution formelle combinée de (6.11) de condition initiale $\hat{\tilde{y}}(0, \eta) = \hat{u}_0(\eta)$, où $\hat{u}_0(\eta)$ est la série associée à $u_0(\eta)$. En particulier, $\tilde{g}_0(X)$ est la solution de $Y' = pX^{p-1}Y$ avec $Y(0) = u_0(0)$, i.e. $\tilde{g}_0(X) = u_0(0)e^{X^p}$. Pour le prolongement d'une solution y dans les vallées discuté au point 4, on obtient ainsi qu'ils y admettent le même DAC, i.e. que leurs coefficients sont les prolongements analytiques des coefficients du DAC de y dans Ω .

6. Il n'était pas dans notre intention de présenter les meilleures constantes A et B dans la démonstration du lemme 6.13. La constante $B = \sin(2\delta)$ peut être largement améliorée si on considère les solutions sur des quasi-secteurs plus petits ; si on réduit l'angle d'ouverture à $2\pi/p + \delta/p$, on peut obtenir

condition initiale en un point $x = L\eta$, $L \in \mathbb{C}$ au lieu de $x = 0$; dans ce cas on doit d'abord étudier l'existence et l'asymptotique de la solution correspondante en $x = 0$ à l'aide de l'équation intérieure.

$B = \cos \delta$ et donc une constante aussi proche de l'optimum 1 qu'on désire. La constante A_2 dépend directement du type Gevrey de la fonction P et ne peut pas être améliorée. La constante A_1 peut être choisie en fonction du point x . Selon les données de la démonstration, ce choix est d'autant plus mauvais que r_1 est proche de r_0 , mais pour r_1 fixé il est possible de choisir les points x_i^j de module proche de r_0 , ce qui permet de récupérer une constante A_1 aussi proche que possible de $r_0 - r_1$. La constante optimale A dépend du point x et de propriétés globales de l'équation différentielle en dehors du cadre local que nous nous sommes fixés dans ce mémoire.

7. Nous avons choisi de présenter la théorie pour un *petit* secteur $S(-\delta, \delta, \varepsilon_0)$ en ε , car c'est le plus proche de certaines applications, dans lesquelles on n'a besoin que de valeurs positives de ε . Bien sûr, le résultat reste valable pour tout autre secteur en ε de petite ouverture car il suffit de changer $\arg \varepsilon$ et $\arg x$. De plus, il est possible de déduire du théorème 6.12 des résultats sur de grands secteurs.

Par exemple, si $P(x, y, \varepsilon)$ est réel pour x, y, ε réels, on peut montrer, pour tout $\delta > 0$ petit, l'existence de la solution de (6.11) avec condition initiale 0 en $x = r_0$ pour $x \in [0, r_0]$ et $\varepsilon \in S(-\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta, \varepsilon_1)$, si $\varepsilon_1 > 0$ est assez petit. Choisissons $r_1 \in]0, r_0[$; puisque cette solution est exponentiellement proche sur $[0, r_1]$ d'une solution du théorème pour un petit sous-secteur $|\arg \varepsilon - \varphi| < \delta$, quelque soit $\varphi \in]-\frac{\pi}{2} + 2\delta, \frac{\pi}{2} - 2\delta[$, elle admet aussi un DAC pour $x \in [0, r_1]$, $\varepsilon \in S(-\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta, \varepsilon_1)$. Ceci sera utile pour l'étude des canards globaux de la partie 7.1.

8. La forme générale d'une équation dite *quasi-linéaire* est

$$\varepsilon v' = f(x)v + \varepsilon P(x, v, \varepsilon) \quad (6.32)$$

avec P analytique dans $D \times D(0, \rho) \times S$ pour tout $\rho > 0$, si ε_0 est assez petit. Nous pouvons lui appliquer le théorème 5.6 en effectuant un changement de la variable x et en utilisant le théorème 5.7. En effet, la fonction $F(x) = \int_0^x f(s) ds$ satisfait $F(x) = x^p(1 + \mathcal{O}(x))$, $x \rightarrow 0$, donc il existe une fonction analytique h avec $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$, telle que $F(x) = h(x)^p$. Soit $\varphi = h^{-1}$ le difféomorphisme réciproque; ainsi on a $F(\varphi(t)) = t^p$. Le changement de variable $x = \varphi(t)$ aboutit alors à l'équation (en posant $w(t, \varepsilon) = v(\varphi(t), \varepsilon)$)

$$\varepsilon \frac{dw}{dt} = pt^{p-1}w + \varepsilon \tilde{P}(t, w, \varepsilon) \quad (6.33)$$

avec $\tilde{P}(t, w, \varepsilon) = \varphi'(t)P(\varphi(t), w, \varepsilon)$. D'après le théorème 6.12 et la remarque 2, une solution w de (6.33) de condition initiale $w(t_1) = w_1$ suffisamment petite en un point t_1 sur une montagne, est définie et possède un DAC pour η d'argument petit et pour t dans la partie de la montagne en dessous de t_1 , dans la majeure partie des deux vallées adjacentes et dans un voisinage de l'ordre de $|\eta|$ de $t = 0$. Le théorème 5.7 (c) permet alors d'obtenir le résultat suivant, donné sans preuve.

Proposition 6.14 . Soit $j \in \{1, \dots, p\}$ et x_1 un point de la j -ième montagne \mathcal{M}_j . Soit $\delta > 0$ arbitrairement petit (en particulier tel que $|\arg F(x_1)| < \frac{\pi}{2} - 2\delta$). On note $\Delta(x_1)$ la partie de $\mathcal{V}_{j-1} \cup \mathcal{M}_j \cup \mathcal{V}_j$ délimitée par courbes d'équation $|\arg F| = \frac{3\pi}{2} - 2\delta$ et $|\arg(F - F(x_1))| = \frac{\pi}{2} + 2\delta$. Soit v une solution de (6.32) de condition initiale $v(x_1) = v_1$ suffisamment petite. Alors, pour $\alpha, \eta_0 > 0$ suffisamment petits, v est définie pour $\eta \in S = S(-\delta, \delta, \eta_0)$ et $x \in \Delta(x_1) \cup D(0, \alpha|\eta|)$. De plus v possède un DAC Gevrey pour $\eta \in S$ et $x \in \Delta(x_1) \cup D(0, \alpha|\eta|)$, $|x - x_1| > \delta$.

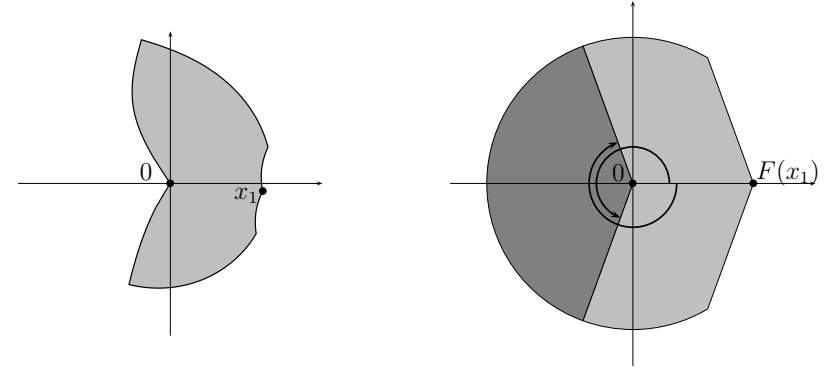


FIGURE 6.5 – Le domaine $\Delta(x_1)$ et son image par F ; cette image est un secteur d'ouverture $3\pi - 4\delta$ privé d'un secteur de sommet $F(x_1)$ et d'ouverture $\pi + 4\delta$. Ici $F(x) = x^2 + \frac{1+0.7i}{4}x^3$.

De même que dans les remarques 4 et 5, v se prolonge aux autres vallées; elle admet aussi un DAC dans ces vallées, qui est le même que celui que nous venons de calculer.

6.3 DAC en un point tournant : généralisations.

Nous voulons appliquer les DAC à des équations plus générales que (6.11). Nous reprenons l'équation (6.1)

$$\varepsilon z' = \Phi(x, z, \varepsilon)$$

avec Φ analytique par rapport à x et z dans un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^2$ et Gevrey d'ordre 1 par rapport à ε dans le secteur $S = S(-\delta, \delta, \eta_0)$ (la variable y a été changée en z pour des raisons de commodités). On suppose que l'ensemble lent \mathcal{L} contient le graphe d'une fonction lente z_0 , analytique dans un domaine simplement connexe D . Ainsi on a pour tout $x \in D$, $(x, y_0(x)) \in \mathcal{D}$ et $\Phi(x, z_0(x), 0) = 0$. On rappelle la notation $f(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, z_0(x), 0)$.

L'hypothèse importante que nous faisons à présent est que D contient un point tournant x^* , autrement dit que f s'annule en x^* . C'est une hypothèse restrictive car généralement la fonction lente z_0 présente une ramification

en un point tournant ; d'autres singularités de z_0 sont aussi possibles, par exemple des pôles. Ici nous supposons que z_0 reste régulière.

Quitte à effectuer une translation et/ou une homothétie sur la variable x , on peut supposer sans perte de généralité que $x^* = 0$ et que $f(x) = px^{p-1}(1 + \mathcal{O}(x))$ lorsque $x \rightarrow 0$, pour un certain $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. On note F la primitive de f s'annulant en 0 et R la partie réelle de F .

Le changement d'inconnue $z = z_0 + y$ aboutit à l'équation

$$\varepsilon y' = (f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon))y + \varepsilon h(x, \varepsilon) + y^2 P(x, y, \varepsilon) \quad (6.34)$$

avec $h(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(\Phi(x, z_0(x), \varepsilon) - \Phi(x, z_0(x), 0)) - z_0'(x)$ où g et P sont donnés par

$$\Delta_2 \Phi(x, z_0(x), z_0(x) + y, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon) + y P(x, y, \varepsilon) ;$$

rappelons la notation $\Delta_2 \Phi$:

$$\Phi(x, z_2, \varepsilon) - \Phi(x, z_1, \varepsilon) = \Delta_2 \Phi(x, z_1, z_2, \varepsilon) (z_2 - z_1).$$

Le changement d'inconnue $y = \varepsilon u$ aboutit à l'équation

$$\varepsilon u' = (f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon))u + h(x, \varepsilon) + \varepsilon u^2 P(x, \varepsilon u, \varepsilon) \quad (6.35)$$

La nouvelle fonction lente u_0 est obtenue en posant $\varepsilon = 0$ dans (6.35), i.e. $u_0 = -h_0/f$, où l'on a posé $h_0 : x \mapsto h(x, 0)$. En général, cette fonction lente a donc un pôle en $x = 0$, mais dans le cas particulier où h_0 a un zéro d'ordre au moins égal à celui de f en 0, u_0 est à nouveau régulière en $x = 0$. Le changement d'inconnue $u = u_0 + v$ aboutit alors à une équation quasi-linéaire (6.32).

Pour le cas où h_0/f admet un pôle en $x = 0$, nous présentons le théorème suivant. L'équation intérieure réduite correspondant à (6.34) ne sera plus linéaire. Le prix à payer pour cette généralisation est que la solution n'est *a priori* pas définie dans un disque de rayon proportionnel à η autour de 0. C'est essentiellement pour cette raison que nous avons introduit les quasi-secteurs avec $\mu < 0$.

Comme avant, nous supposons d'abord que $f(x) = px^{p-1}$ et nous généraliserons par la suite. Nous reprenons les notations du début de la partie 6.2 et des lemmes 6.8 et théorème 6.10 : $\varepsilon = \eta^p$, $r_0, r_2, \varepsilon_0, \delta > 0$, $\Sigma = S(-\delta, \delta, \varepsilon_0)$, $D_1 = D(0, r_0)$, $D_2 = D(0, r_2)$, $\alpha = -\frac{3\pi}{2p} + \frac{2\delta}{p}$, $\beta = \frac{3\pi}{2p} - \frac{2\delta}{p}$, $r_1 \in]0, r_0 \cos(2\delta)^{1/p}[$.

Théorème 6.15 . *On considère l'équation*

$$\varepsilon y' = px^{p-1}y + \varepsilon h(x, \varepsilon) + y P(x, y, \varepsilon) \quad (6.36)$$

avec h et P analytiques bornées dans $D_1 \times \Sigma$, resp. $D_1 \times D_2 \times \Sigma$ et admettant chacune un développement asymptotique uniforme Gevrey d'ordre 1 quand $\Sigma \ni \varepsilon \rightarrow 0$.

On suppose qu'il existe $r \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que, d'une part $h(x, 0) = \mathcal{O}(x^{r-1})$, $x \rightarrow 0$ et d'autre part on a un développement

$$P(x, y, 0) = \sum_{k \geq 0, l \geq 1, k+r \geq p-1} p_{kl} x^k y^l.$$

Alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$, $\eta_1 > 0$ et une solution $y(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta^r)$ de (6.36) définie pour $\eta \in S_1 := S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_1)$ et $x \in V(\eta) = V(\alpha, \beta, r_1, \mu|\eta|)$.

De plus, y a un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ quand $S_1 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V(\eta)$.

REMARQUES . 1. La condition sur P est équivalente à la condition que $P(x, 0, 0) = 0$ et que la λ -valuation de la série de $P(\lambda X, \lambda^r Y, 0)$ est au moins $p-1$. Une autre condition équivalente est qu'on peut écrire

$$P(x, y, \varepsilon) = \sum_{\ell=1}^{q-1} x^{p-1-r\ell} P_\ell(x) y^{\ell+1} + y^{q+1} Q_0(x, y) + \varepsilon y Q_1(x, y, \varepsilon) \quad (6.37)$$

avec des fonction holomorphes $P_\ell(x)$, $Q_0(x, y)$, $Q_1(x, y, \varepsilon)$ sur D_1 , resp. $D_1 \times D_2$ et $D_1 \times D_2 \times \Sigma$, où q désigne le plus petit entier tel que $qr \geq p-1$.

L'équation intérieure, obtenue en posant $x = \eta X$, $y = \eta^r Y$, est

$$Y' = pX^{p-1}Y + \tilde{P}(X, Y, \eta)$$

avec

$$\tilde{P}(X, Y, \eta) = \eta^{1-r} h(\eta X, \eta) + \eta^{1-p} Y P(\eta X, \eta^r Y, \eta^p).$$

Dans la limite $\eta \rightarrow 0$, on obtient donc l'équation non linéaire $Y' = pX^{p-1}Y + cX^{r-1} + Y Q(X, Y)$, où c est le coefficient de x^{r-1} dans $h(x, 0)$ et $Q(X, Y) = \sum_{k+r=p-1} p_{kl} X^k Y^l$.

2. L'exemple ci-dessous montre que la condition imposée sur P est nécessaire et naturelle. Il s'agit de l'équation

$$\varepsilon y' = 4x^3 y - 4\varepsilon - xy^2. \quad (6.38)$$

On a donc $p = 4$, $r = 1$ et $p_{11} \neq 0$. Nous montrons à la fin de cette partie 6 que cette équation ne peut pas avoir de solution ayant un DAC.

Preuve du théorème 6.15. Elle est une modification de celle du théorème 6.10 – nous ne présentons que la preuve utilisant le théorème-clé 5.1. Nous montrons d'abord l'existence d'une solution y , ensuite celle d'une famille y_i^j sur un bon recouvrement et enfin que leurs différences sont exponentiellement petites. Nous concluons en utilisant le théorème 5.1. Notons $S_1 = S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_1)$ avec un petit $\eta_1 > 0$ à déterminer. Le domaine en x est différent de celui de lemme 6.8, car il ne contient pas *a priori* $x = 0$.

Soit $x_0 = r_1 \cos(2\delta)^{-1/p}$. Pour $m > 0$, notons $\Omega(m)$ l'union du quasi-secteur $V(\alpha, \beta, r_1, -m)$ et de l'intérieur du triangle curviligne $T(r_1, \delta)$ de la preuve de 6.10,⁴ privée du triangle curviligne dont l'image par l'application $F : x \mapsto x^p$ est $\Delta(0, m^p e^{\pi-2\delta}, \frac{m^p}{\sin \delta} e^{i(\frac{3\pi}{2}-3\delta)})$, ainsi que du triangle curviligne dont l'image par \mathcal{P} est $\Delta(0, m^p e^{-\pi+2\delta}, \frac{m^p}{\sin \delta} e^{i(-\frac{3\pi}{2}-3\delta)})$; voir figure 6.6. Comme dans la preuve

4. i.e. l'ensemble dont l'image par F est le triangle de sommets $x_0^p, r_1^p e^{2\delta i}$ et $r_1^p e^{-2\delta i}$.

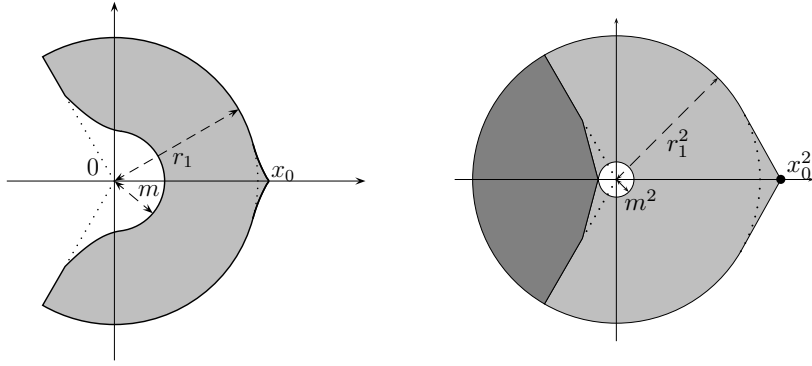


FIGURE 6.6 – Le domaine $\Omega(m)$ et son image par $F : x \mapsto x^p$; ici $p = 2$. On pourra comparer avec la figure 6.3 .

de lemme 6.8, le choix du domaine $\Omega(m)$ est motivé par le fait qu'il contient $V(\alpha, \beta, r_1, -m(\sin \delta)^{-1/p})$ et qu'il est δ -descendant à partir de x_0 par rapport au relief R_d donné par (6.20) pour tout $|d| < \delta$. La deuxième propriété peut être exprimée de la façon suivante : pour tout $x \in \Omega(m)$ il existe un chemin $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \Omega(m) \cup \{x_0\}$, $|\gamma'(t)| = 1$ pour tout t , de x_0 à x tel que pour tout $t \in [0, \ell]$ et tout $d \in]-\delta, \delta[$ l'inégalité (6.21), i.e.

$$\operatorname{Re}(\gamma(t)^{p-1} \gamma'(t) e^{-id}) \leq -\sigma |\gamma(t)^{p-1}|$$

est satisfaite avec $\sigma = \sin \delta$. On note γ_x un tel chemin ; pour lui, on peut donc appliquer le lemme 6.9.

Notons $D \geq 1$ un nombre réel à choisir convenablement plus tard. Soit \mathcal{E} l'espace de Banach des fonctions z holomorphes sur l'ensemble des (x, η) avec $\eta \in S_1$, $x \in \Omega(D|\eta|)$ pour lesquelles il existe une constante Z telle que $|z(x, \eta)| \leq Z |\eta|^r$ pour tout (x, η) . Pour $z \in \mathcal{E}$, on définit $\|z\|$ comme étant la plus petite de ces constantes Z . Avec ρ à choisir convenablement, soit \mathcal{M} l'ensemble (non vide) des éléments z de \mathcal{E} de norme $\|z\| \leq \rho$.

Pour $z \in \mathcal{M}$, on pose

$$(Tz)(x, \eta) = \frac{1}{\eta^p} e^{x^p/\eta^p} \int_{\gamma_x} e^{-\xi^p/\eta^p} (\eta^p h(\xi, \eta^p) + z(\xi, \eta) P(\xi, z(\xi, \eta), \eta^p)) d\xi. \quad (6.39)$$

Un point fixe y de T est bien l'unique solution de (6.36) satisfaisant $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x, \eta) = 0$ pour tout η . L'écriture (6.37) implique l'existence de constantes C_0, \dots, C_q telles que

$$|\eta^p h(\xi, \eta^p) + z(\xi, \eta) P(\xi, z(\xi, \eta), \eta^p)| \leq C_0 |\xi|^{r-1} |\eta|^p + \sum_{\ell=1}^{q-1} C_\ell \rho^{\ell+1} |\xi|^{p-1-r\ell} |\eta|^{r(\ell+1)} + C_q |\eta|^{p-1+r} (\rho + \rho^{q+1}),$$

quand $z \in \mathcal{M}$. Puisque $|\gamma_x(x)| \geq D|\eta|$, on en déduit à l'aide du lemme 6.9.2 que

$$|(Tz)(x, \eta)| \leq \frac{K(\rho)}{p\sigma D} |\eta|^r$$

avec $K(\rho) = C_0 + \sum_{\ell=1}^{q-1} C_\ell \rho^{\ell+1} + C_q(\rho + \rho^{q+1})$, si $D \geq 1$. Nous choisissons donc $\rho > 0$ arbitraire et $D \geq 1$ assez grand pour que $K(\rho) \leq p\sigma D\rho$. Notre majoration assure alors que $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

À présent nous montrons que T est une contraction, sous une condition additionnelle pour D . Notons $q(x, z_1, z_2, \varepsilon)$ la fonction holomorphe telle que $z_2 P(x, z_2, \varepsilon) - z_1 P(x, z_1, \varepsilon) = q(x, z_1, z_2, \varepsilon)(z_2 - z_1)$. Alors $q(x, 0, 0, 0) = 0$ pour tout x et on peut écrire $q(x, z_1, z_2, 0)$ de manière analogue à P :

$$q(x, z_1, z_2, 0) = \sum_{k+\ell_1+\ell_2 \geq p-1} q_{k, \ell_1, \ell_2} x^k z_1^{\ell_1} z_2^{\ell_2}. \quad (6.40)$$

Ceci implique une majoration

$$|q(x, z_1(x, \eta), z_2(x, \eta), \eta^p)| \leq \sum_{\ell=1}^{q-1} \tilde{C}_\ell \rho^\ell |x|^{p-1-r\ell} |\eta|^{r\ell} + \tilde{C}_q |\eta|^{p-1} (1 + \rho^q) \quad (6.41)$$

avec certaines constantes \tilde{C}_ℓ , si $z_1, z_2 \in \mathcal{M}$. Comme précédemment, ceci implique

$$\|Tz_2 - Tz_1\| \leq \frac{\tilde{K}(\rho)}{\sigma D} \|z_2 - z_1\|$$

avec $\tilde{K}(\rho) = \sum_{\ell=1}^{q-1} \tilde{C}_\ell \rho^\ell + \tilde{C}_q(1 + \rho^q)$. Si D satisfait de plus $\tilde{K}(\rho) < \sigma D$, alors T est une contraction sur \mathcal{M} . On obtient ainsi l'existence de la solution y énoncée dans le théorème sur l'ensemble des (x, η) avec $\eta \in S_1$, $x \in \Omega(D|\eta|)$ et donc aussi pour $x \in V(\alpha, \beta, r_1, \mu|\eta|)$ avec $\mu = -D/\sin \delta$.

Ensuite nous utilisons les mêmes nombres L, M , les mêmes angles $\varphi_l, \alpha_l, \beta_l, \alpha^j, \beta^j, \alpha_l^j, \beta_l^j, \tilde{\alpha}_l^j, \tilde{\beta}_l^j$ et les mêmes secteurs S_l , $l = 1, \dots, L$, $j = 0, \dots, p-1$ que dans la démonstration de théorème 6.12. Par une transformation de Borel et par des transformations de Laplace tronquées, nous construisons comme dans ladite démonstration des fonctions $h_l(x, \eta)$, $P_l(x, \eta)$ ayant le même développement asymptotique Gevrey que les données h et P .

Au lieu des secteurs en x de la preuve antérieure, nous utilisons des quasi-secteurs $V^j = V(\alpha^j, \beta^j, \infty, \mu)$ et $\tilde{V}_l^j(\eta) = V(\tilde{\alpha}_l^j, \tilde{\beta}_l^j, r_1, -D|\eta|(\sin \delta)^{1/p})$ ainsi que des ensembles $\Omega_l^j(D|\eta|)$ correspondants (c.f. figure 6.6), avec $D \geq 1$ à déterminer. Pour chacune des équations différentielles $\varepsilon y' = p x^{p-1} y + \varepsilon h_l(x, \eta) + y P_l(x, y, \varepsilon)$ — satisfaisant les mêmes conditions que (6.36) dans l'hypothèse du théorème — et tout $j \in \{0, \dots, p-1\}$, nous construisons sa solution y_l^j sur l'ensemble des (x, η) avec $\eta \in S_l$, $x \in \Omega_l^j(D|\eta|)$ de la même façon que y ci-dessus. Le nombre D est choisi tel que ceci soit possible pour tout (j, l) .

Montrons à présent que leurs différences sont exponentiellement petites de façon analogue au lemme 6.13. Il s'agit de montrer qu'il existe des constantes $C, A, B > 0$ telles que pour chaque (j, l) on ait

$$|y_{l+1}^j(x, \eta) - y_l^j(x, \eta)| \leq C \exp\left(-\frac{A}{|\eta|^p}\right) \text{ quand } \eta \in S_{l,l+1}, x \in \tilde{V}_{l,l+1}^j(\eta), \quad (6.42)$$

$$|y_l^{j+1}(x, \eta) - y_l^j(x, \eta)| \leq C \exp(-B|\frac{x}{\eta}|^p) \text{ quand } \eta \in S_l, x \in \tilde{V}_l^{j,j+1}(\eta), \quad (6.43)$$

où on a utilisé comme précédemment $\tilde{V}_{l,l+1}^j$ et $\tilde{V}_l^{j,j+1}$ pour désigner les intersections correspondantes.

Commençons par la majoration (6.43) et posons $z = y_l^{j+1} - y_l^j$. Alors z est solution de l'équation

$$\eta^p z' = (px^{p-1} + g(x, \eta))z \quad (6.44)$$

avec $g(x, \eta) = q_l(x, y_l^j(x, \eta), y_l^{j+1}(x, \eta), \eta^p)$, où q_l est l'analogue de q , satisfaisant $z_2 P_l(x, z_2, \varepsilon) - z_1 P_l(x, z_1, \varepsilon) = q_l(x, z_1, z_2, \varepsilon)(z_2 - z_1)$. De manière analogue à (6.41), on obtient

$$|g(x, \eta)| \leq \sum_{\ell=1}^{q-1} \bar{C}_\ell \rho^\ell |x|^{p-1-r_\ell} |\eta|^{r_\ell} + \bar{C}_q |\eta|^{p-1} (1 + \rho^q) =: |\eta|^{p-1} h(|\frac{x}{\eta}|) \quad (6.45)$$

avec certaines constantes \bar{C}_ℓ et donc avec un certain polynôme h de degré au plus $p-2$. Ceci implique

$$|z(x, \eta)| \leq K \exp \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{x}{\eta} \right)^p + H \left(\left| \frac{x}{\eta} \right| \right) \right\}$$

où H est la primitive de h s'annulant en 0 et où $K > 0$ est une constante. Comme le degré de H est au maximum $p-1$, ceci implique (6.43), si $|\frac{x}{\eta}|$ est assez grand, autrement dit si μ est assez grand.

Concernant la majoration (6.42), on procède de manière analogue à la démonstration de (6.27) et l'on pose $w = y_{l+1}^j - y_l^j$. Alors w est solution de l'équation

$$\eta^p w' = (px^{p-1} + \tilde{g}(x, \eta))w + Q(x, \eta) \quad (6.46)$$

avec

$$\tilde{g}(x, \eta) = q_{l+1}(x, y_l^j(x, \eta), y_{l+1}^j(x, \eta), \eta^p)$$

et

$$Q(x, \eta) = \eta^p (h_{l+1} - h_l)(x, \eta) + y_{l+1} P_{l+1}(x, y_l^j(x, \eta), \eta^p) - y_l P_l(x, y_l^j(x, \eta), \eta^p).$$

Posons $\tilde{G}(x, \eta) = \exp(\eta^{-p} \int_0^x \tilde{g}(u, \eta) du)$. De manière analogue à (6.45), on montre l'existence de constantes L et M telles que $\frac{1}{L} \exp(-M|\eta|^{1-p}) \leq |\tilde{G}(x, \eta)| \leq L \exp(M|\eta|^{1-p})$. Soit de nouveau $\xi \in \partial\Omega_{l,l+1}^j(D|\eta|)$ avec une distance maximale de 0 et avec $\arg \xi$ bissectant $V_{l,l+1}^j(\eta)$; ainsi ξ est de la forme $\xi = r_2 \exp\{2\pi i(\frac{j}{p} + \frac{l+1/2}{L})\}$ avec $r_2 > r_1$ (on trouve $r_2 = r_1 \cos(2\delta - \frac{\pi}{M})^{-1/p}$). La formule de variation de la constante donne, pour tout $x \in V_{l,l+1}^j(\eta)$

$$w(x, \eta) = w(\xi, \eta) \exp \left\{ \left(\frac{x}{\eta} \right)^p - \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^p \right\} \frac{\tilde{G}(x, \eta)}{\tilde{G}(\xi, \eta)} + \quad (6.47)$$

$$\eta^{-p} \int_\xi^x \exp \left\{ \left(\frac{s}{\eta} \right)^p - \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^p \right\} \frac{\tilde{G}(s, \eta)}{\tilde{G}(\xi, \eta)} Q(s, \eta) ds.$$

où le chemin d'intégration est choisi descendant pour le relief R_d donné par (6.20) pour tout $d \in]\frac{2l\pi}{M}, \frac{2(l+1)\pi}{M}[$.

Concernant le premier terme de (6.47), on a

$$|w(\xi, \eta)| < 2r \text{ et } \left| \frac{\tilde{G}(x, \eta)}{\tilde{G}(\xi, \eta)} \right| \leq L^2 \exp(2M|\eta|^{1-p}).$$

De plus, pour tout $x \in V_{l,l+1}^j(\eta)$ et tout $d \in]\frac{2l\pi}{M}, \frac{2(l+1)\pi}{M}[$, on a

$$\operatorname{Re}(x^p e^{-id}) - \operatorname{Re}(\xi^p e^{-id}) \leq -A_1$$

avec $A_1 = r_2 \cos(\frac{\pi}{M}) - r_1$, donc

$$\left| \exp \left\{ \left(\frac{x}{\eta} \right)^p - \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^p \right\} \right| \leq \exp \left(-\frac{A_1}{|\eta|^p} \right)$$

pour tout $\eta \in S_{l,l+1}$ et tout $x \in V_{l,l+1}^j(\eta)$. Ceci implique que le premier terme est exponentiellement petit.

Concernant le deuxième terme de (6.47), les fonctions h_l et h_{l+1} , respectivement P_l et P_{l+1} , sont asymptotiques Gevrey-1 à la même série, donc il existe $C_2, A_2 > 0$ tels que pour tout $\eta \in S_{l,l+1}$ et tout $x \in V_{l,l+1}^j(\eta)$, $|Q(x, \eta)| \leq C_2 \exp(-\frac{A_2}{|\eta|^p})$. Le chemin étant choisi descendant pour tout $d \in]\frac{2l\pi}{M}, \frac{2(l+1)\pi}{M}[$, on a, pour tout s sur ce chemin et tout $\eta \in S_{l,l+1}$, $\operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{x}{\eta} \right)^p - \left(\frac{s}{\eta} \right)^p \right\} \leq 0$. On obtient que le deuxième terme est majoré par $(r_1 + r_2)C_2 L^2 \exp(-A_2|\eta|^{-p} + 2M|\eta|^{1-p})$, et donc lui aussi exponentiellement petit si η_1 est assez petit. Ceci démontre enfin (6.42).

On termine cette preuve comme celle du théorème 6.12 en appliquant le théorème 5.1. \square

Revenons à l'équation générale (6.34) et rappelons que F est la primitive s'annulant en 0 du coefficient f de y et que R est sa partie réelle. Le relief associé, i.e. le graphe de $R : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, consiste en une succession de p montagnes \mathcal{M}_j , $j = 0, \dots, p-1$ où $R > 0$ et p vallées \mathcal{V}_j où $R < 0$, délimitées par les séparatrices de col $R = 0$. On numérote ces montagnes et vallées de façon à ce qu'elles soient connexes, que \mathcal{M}_0 contienne un bout de l'axe réel positif, et qu'elles alternent $\mathcal{M}_j, \mathcal{V}_j, \mathcal{M}_{j+1}$ (modulo p). Ainsi au voisinage de $x = 0$, \mathcal{M}_j est "tangente" au secteur $S(\frac{2j\pi}{p} - \frac{\pi}{2p}, \frac{2j\pi}{p} + \frac{\pi}{2p}, \infty)$, et \mathcal{V}_j au secteur $S(\frac{2j\pi}{p} + \frac{\pi}{2p}, \frac{2j\pi}{p} + \frac{3\pi}{2p}, \infty)$. Nous montrons comme corollaire du théorème 6.15 pour $j = 1, \dots, p$ qu'il existe une solution de (6.34) admettant un DAC Gevrey pour tout quasi-secteur inclus dans $\mathcal{M}_j \cup \mathcal{V}_j \cup \mathcal{V}_{j-1}$, i.e. pour chaque montagne et les deux vallées adjacentes. Les notations $r_0, r_1, r_2, \varepsilon_0, \delta, D_1, D_2$ et Σ sont les mêmes que dans le théorème 6.15. Les notations α et β ont été changées par commodité.

Corollaire 6.16 . *On considère l'équation*

$$\varepsilon y' = f(x)y + \varepsilon h(x, \varepsilon) + y P(x, y, \varepsilon) \quad (6.48)$$

avec f analytique dans D_1 , $f(x) = px^{p-1} + \mathcal{O}(x^p)$ quand $x \rightarrow 0$ et avec h et P analytiques bornées dans $D_1 \times \Sigma$, resp. $D_1 \times D_2 \times \Sigma$ et admettant

chacune un développement asymptotique uniforme Gevrey d'ordre 1 quand $\Sigma \ni \varepsilon \rightarrow 0$.

On suppose qu'il existe $r \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que, d'une part $h(x, 0) = \mathcal{O}(x^{r-1})$, $x \rightarrow 0$ et d'autre part on a un développement

$$P(x, y, 0) = \sum_{k \geq 0, l \geq 1, k+rl \geq p-1} p_{kl} x^k y^l.$$

Enfin, on suppose que $\alpha < \beta$, j et $r_3 > 0$ sont tels que $S(\alpha, \beta, r_3) \subset (\mathcal{V}_{j-1} \cup \mathcal{M}_j \cup \mathcal{V}_j) \cap D(0, r_1)$, et que $\delta < \frac{p}{6}(\beta - \alpha)$.

Alors, il existe $\mu \in \mathbb{R}$, $\eta_1 > 0$ et une solution $y(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta^r)$ de (6.48) définie pour $\eta \in S_1 := S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_1)$ et $x \in V(\eta) = V(\alpha + \frac{3\delta}{p}, \beta - \frac{3\delta}{p}, r_3 - \delta, \mu|\eta|)$.

De plus y a un DAC Gevrey d'ordre $1/p$ quand $S_1 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V(\eta)$.

Preuve. Il existe une fonction φ avec $\varphi(u) = u e^{2\pi i j / p} + \mathcal{O}(u^2)$ telle que $F(\varphi(u)) = \varphi(u^p)$. Pour $\rho > 0$ assez petit, φ est un difféomorphisme de $D(0, \rho)$ sur son image. Le changement de variable $x = \varphi(u)$ transforme alors (6.48) en (6.36) (avec la variable indépendante notée u). On applique le théorème 6.15 et on obtient l'existence d'une solution $z(u, \eta)$ admettant un DAC quand $\eta \in S_1 := S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_1)$ et $u \in V(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, r_1, \tilde{\mu}|\eta|)$ où $\tilde{\alpha} = -\frac{3\pi}{2p} + \frac{2\delta}{p}$ et $\tilde{\beta} = \frac{3\pi}{2p} - \frac{2\delta}{p}$ avec certains $\eta_1 > 0$, $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$.

On applique le théorème 5.7 (c) au changement de variable $u = \varphi^{-1}(x)$. On utilise $\rho > 0$ assez petit pour que l'image de $V(\alpha + \frac{3\delta}{p}, \beta - \frac{3\delta}{p}, \frac{\rho}{2}, \mu|\eta|)$ par φ^{-1} soit contenue dans $V(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \rho, \tilde{\mu}|\eta|)$, pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$. Ceci est possible car la condition de l'énoncé implique $\frac{2j\pi}{p} - \frac{3\pi}{2p} \leq \alpha < \beta \leq \frac{2j\pi}{p} + \frac{3\pi}{2p}$. On obtient ainsi un DAC dans $V(\alpha + \frac{3\delta}{p}, \beta - \frac{3\delta}{p}, \frac{\rho}{2}, \mu|\eta|)$. Pour prolonger ce DAC aux $x \in V(\eta)$ tels que $\frac{\rho}{2} < |x| < r_3 - \delta$, on utilise la proposition 4.6. \square

On détermine la série formelle combinée du DAC d'une manière analogue à la fin de 6.2.1. Pour la partie lente, on détermine comme avant la partie non polaire en $x = 0$ de la solution formelle extérieure de (6.48).

Pour déterminer la partie rapide, on passe à l'équation intérieure en posant $x = \eta X$ et $y = \eta^r Y$, comme on l'avait fait pour l'équation (6.36) dans la remarque qui suit le théorème 6.15. Avec les notations $f(x) = px^{p-1} + x^p f_1(x)$ et $h(x, \varepsilon) = cx^{r-1} + x^r h_1(x) + \varepsilon k(x, \varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dX} &= (pX^{p-1} + \eta X^p f_1(\eta X))Y + cX^{r-1} + \\ &\quad \eta M(X, \eta) + \eta^{1-p} Y P(\eta X, \eta^r Y, \eta^p) \end{aligned} \quad (6.49)$$

avec $M(X, \eta) = X^r h_1(\eta X) + \eta^{p-r} k(\eta X, \eta^p)$. La condition du théorème sur P signifie que le dernier terme de (6.49), $\eta^{1-p} Y P(\eta X, \eta^r Y, \eta^p)$, est borné lorsque X et Y restent dans des compacts, uniformément par rapport à η . D'après cette hypothèse, en notant

$$Y Q(X, Y) = \sum_{k+rl=p-1} p_{k,l} X^k Y^l \quad (6.50)$$

la partie quasi-homogène de plus bas degré de P , on obtient que ce terme est de la forme

$$\eta^{1-p} Y P(\eta X, \eta^r Y, \eta^p) = Y^2 Q(X, Y) + \eta Y P_1(X, Y, \eta).$$

L'équation intérieure a pour limite lorsque $\eta \rightarrow 0$

$$\frac{dY}{dX} = pX^{p-1}Y + cX^{r-1} + Y^2 Q(X, Y). \quad (6.51)$$

Dans la théorie des points singuliers irréguliers, on montre que (6.51) admet une solution unique $Y_0(X) \sim -\frac{c}{p}X^{r-p}$ quand $|X| \rightarrow \infty$ dans un quasi-secteur $V = V(-\frac{3\pi}{2p} + \gamma, \frac{3\pi}{2p} - \gamma, \infty, \mu)$ avec $\gamma > 0$ arbitraire et $\mu < 0$, $|\mu|$ assez grand. La fonction Y_0 admet un développement Gevrey $\frac{1}{p}$

$$Y_0(X) \sim \sum_{l \geq 1} d_l X^{r-pl} \text{ quand } V \ni X \rightarrow \infty.$$

La solution intérieure formelle complète (sur V) est déterminée en injectant $\hat{Y}(X, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(X) \eta^n$ dans (6.49). Ainsi, on détermine $Y_n(X)$ pour $n \geq 1$ comme solution à croissance polynomiale d'une équation linéaire non homogène $\frac{dY_n}{dX} = pX^{p-1}Y_n + h_n(X)$, où h_n contient des termes de f_1, M et P ainsi que Y_0, \dots, Y_{n-1} . La partie rapide du DAC du corollaire 6.16 sur V , i.e. pour $j = 1$, est $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(X) \eta^{n+r}$ avec les parties non polynomiales g_n des Y_n . Pour déterminer les parties rapides des DAC pour d'autres valeurs de j , on effectue une rotation $X \leftarrow X e^{2\pi i / p}$.

Le théorème 6.15 et le corollaire 6.16 ont le défaut de ne pas contenir d'information sur la quantité μ déterminant la distance du domaine de validité du DAC et d'un secteur. L'énoncé suivant permet d'avoir cette information à partir des informations sur la solution Y_0 de (6.51).

Corollaire 6.17 . *Sous les conditions du corollaire 6.16, on suppose que la solution Y_0 de l'équation intérieure réduite (6.51) satisfaisant $Y_0(X) \sim -\frac{c}{p}X^{r-p}$ quand $V \ni X \rightarrow \infty$ peut être prolongée sur un voisinage de l'adhérence de $V(\tilde{\alpha} - \frac{2j\pi i}{p} - \frac{\delta}{p}, \tilde{\beta} - \frac{2j\pi i}{p} + \frac{\delta}{p}, \infty, \tilde{\mu})$ avec certains $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ satisfaisant $\alpha < \tilde{\alpha} < \tilde{\beta} < \beta$ et $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$. Alors les solutions y du corollaire 6.16 peuvent être prolongées et admettent des DAC Gevrey pour l'ensemble des (x, η) tels que $\eta \in S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_1)$ et $x \in V(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{r}_1, \tilde{\mu}|\eta|)$.*

Nous proposons un cas particulier séparément.

Corollaire 6.18 . *Sous les conditions du corollaire 6.16, on suppose que $p_{kl} = 0$ si $k + rl = p - 1$. Alors, pour tout $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$, il existe $\eta_1 > 0$ et une solution $y(x, \eta)$ de (6.48) définie pour $\eta \in S_1 := S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_1)$ et $x \in V(\eta) = V(\alpha, \beta, \tilde{r}_1, \tilde{\mu}|\eta|)$.*

De plus y a un DAC Gevrey d'ordre $1/p$ quand $S_1 \ni \eta \rightarrow 0$ et $x \in V(\eta)$.

Preuve du corollaire 6.17. D'après le corollaire 6.16, les solutions y existent et admettent des DAC Gevrey quand $\eta \in S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \eta_1)$ et $x \in V(\alpha, \beta, \tilde{r}_1, \mu |\eta|)$ avec un certain $\mu \in \mathbb{R}$, éventuellement négatif et tel que $|\mu|$ est grand. Fixons une telle solution y . D'après la proposition 4.4, $Y(X, \eta) := y(\eta X, \eta)$ admet un développement asymptotique uniforme Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ de la forme $Y(X, \eta) \sim \sum_{n \geq 0} Z_n(X) \eta^n$

sur des compacts de $V(\alpha - \frac{\delta}{p}, \beta + \frac{\delta}{p}, \infty, \mu)$. Ici en particulier $Z_0(X) = Y_0(X e^{-\frac{2i\pi i}{p}})$.

Choisissons $X_0 \in V(\tilde{\alpha} - \frac{\delta}{p}, \tilde{\beta} + \frac{\delta}{p}, L, \mu)$ avec $L > -\mu$. Alors en particulier $Y_0(\eta) := Y(X_0, \eta)$ admet un développement asymptotique Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$.

À présent, considérons la solution \tilde{Y} de l'équation intérieure (6.49) avec la condition initiale $\tilde{Y}(X_0, \eta) = Y_0(\eta)$. D'une part, elle coïncide avec Y sur des compacts de $V(\alpha - \frac{\delta}{p}, \beta + \frac{\delta}{p}, \infty, \mu)$. D'autre part, elle se réduit à la solution Z_0 de (6.51) lorsque η tend vers 0 puisque $Y_0(0) = Z_0(X_0)$. Or d'après l'hypothèse du corollaire, Y_0 peut être prolongée et donc aussi Z_0 peut être prolongée analytiquement sur un voisinage de l'adhérence de

$$\Omega = V(\tilde{\alpha} - \frac{\delta}{p}, \tilde{\beta} + \frac{\delta}{p}, \infty, \tilde{\mu}) \setminus V(\alpha - \frac{\delta}{p}, \beta + \frac{\delta}{p}, \infty, -L).$$

Comme (6.49) est régulièrement perturbée (sur des compacts), le théorème de dépendance par rapport aux paramètres et aux conditions initiales entraîne que $\tilde{Y}(X, \eta)$ est holomorphe pour X dans l'adhérence de Ω quand $\eta \in S(-\frac{\delta}{p}, \frac{\delta}{p}, \tilde{\eta}_1)$, si $\tilde{\eta}_1 > 0$ est assez petit. De plus, on obtient que \tilde{Y} admet un développement asymptotique uniforme Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ sur cette adhérence.

Or on avait vu que Y et \tilde{Y} coïncident sur un ouvert de \mathbb{C}^2 , donc l'une est un prolongement de l'autre. Les hypothèses de la proposition 4.5 relative au prolongement intérieur des DAC sont donc satisfaites et on peut conclure. \square

Preuve du corollaire 6.18. Dans ce cas, l'équation (6.51) est linéaire et la condition du corollaire 6.17 est donc trivialement satisfaite. \square

REMARQUES. 1. Dans ses travaux [27, 28, 29], É. Matzinger démontre l'existence de solutions avec des développements extérieur et intérieur pour une équation différentielle plus générale, qui en particulier peut contenir des pôles en $x = 0$, c.f. par exemple le théorème 1 de [29]. D'après notre proposition 3.11, ceci implique aussi l'existence de DAC pour ces solutions. Il se pose naturellement la question du caractère Gevrey de ces DAC, et si on peut montrer ce caractère de manière analogue à la preuve de notre théorème 6.15.

2. On peut traiter de la même manière que (6.36) l'équation suivante, dans laquelle le côté droit admet un développement en puissances de η au lieu de ε . Il s'agit de

$$\eta^p y' = f(x)y + h(x, \eta) + yP(x, y, \eta), \quad (6.52)$$

où $f(x) = px^{p-1} + O(x^p)$ comme avant, où h et P ont des développements asymptotiques Gevrey- $\frac{1}{p}$ et où les coefficients $h_j(x)$ et $P_j(x, y)$ satisfont, avec

un certain $r \in \{1, \dots, p-1\}$, les conditions

$$h_j(x) = \sum_{l \geq 0} h_{jl} x^{l+p+r-1-j}$$

$$P_0(x, 0, 0) = 0 \text{ et pour } j = 0, \dots, p-2$$

$$P_j(x, y, 0) = \sum_{k \geq 0, l \geq 0, k+rl \geq p-1-j} p_{jkl} x^k y^l.$$

Si $|h_{00}|$ est assez petit, alors l'équation

$$p\lambda + h_{00} + \sum_{k+rl=p-1} p_{0,k,l} \lambda^l = 0$$

admet une solution simple λ de petite valeur absolue. Il existe alors une unique transformation $y = \sum_{j=0}^{r-1} a_j(x) \eta^j + z$ avec $a_0(x) = \lambda x^r + \mathcal{O}(x^{r+1})$ réduisant (6.52) à une équation de la même forme, satisfaisant les mêmes conditions et satisfaisant de plus $h_0 = \dots = h_{r-1} = 0$.

Pour cette dernière équation, on montre l'existence d'une solution $z(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta^r)$ pour $\eta \in S_1$ et $x \in V(\eta)$ avec $S_1, V(\eta)$ comme dans le corollaire 6.16; ceci entraîne de suite le même énoncé pour y . Notons toutefois que la solution formelle dans le cas présent peut être très différente de celle du corollaire 6.16; par exemple *chaque* puissance de η peut contenir un facteur « lent ».

3. Toutes les équations de cette partie 6 pourraient dépendre analytiquement (ou seulement continûment) des paramètres additionnels. La preuve avec le théorème du point fixe et (dans le théorème 5.1) avec des formules intégrales montre alors que les solutions dépendent analytiquement (resp. continûment) de ces paramètres et que leurs DAC Gevrey sont uniformes par rapport à ces paramètres.

4. Nous reprenons ici plus en détails l'étude de l'exemple (6.38). Sur l'axe réel positif, on peut voir qu'il existe une unique solution y^+ tendant vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. Cependant cette solution ne peut pas se prolonger jusqu'à des x de l'ordre de $\eta = \varepsilon^{1/4}$. On peut même voir qu'elle présente des singularités sur l'axe réel pour des x de l'ordre de $\mu = \varepsilon^{1/5}$. En effet, le changement de variables et inconnues $x = \mu X, y = \mu^2 Y, \varepsilon = \mu^5$ conduit à l'équation

$$\mu \frac{dY}{dX} = 4X^3 Y - 4 - XY^2. \quad (6.53)$$

Il s'agit d'une équation singulièrement perturbée (avec μ tenant le rôle de ε). La courbe lente $X \mapsto Y_0(X)$ qui nous concerne est la branche asymptote à l'axe $0X$ en $+\infty$ de la courbe algébrique $4X^3 Y - 4 - XY^2 = 0$; elle n'est pas définie si $0 \leq X < 1$. La solution Y^+ correspondant à y^+ , i.e.

$Y^+(X, \mu) = \mu^{-2}y^+(\mu X, \mu^5)$, satisfait $Y^+(X, \mu) \rightarrow Y_0(X)$ lorsque $\mu \rightarrow 0$, pour tout $X \in]1, +\infty[$. Pour tout $\delta > 0$, il ne peut pas exister de solution de (6.53) bornée sur $[1 - \delta, 1]$ puisque le membre de droite de l'équation, $4X^3Y - 4 - XY^2$, est majoré par une constante négative sur $[1 - \delta, 1 - \delta/2]$ pour tout $Y \in \mathbb{R}$. En utilisant que (6.53) est une équation de Riccati et en effectuant le changement d'inconnue $Y = 1/Z$, on peut aussi montrer que Y^+ a des singularités polaires dans tout intervalle $[1 - \delta, 1]$, si μ est assez petit.

On constate aussi que la solution formelle de (6.38) présente des pôles d'ordre trop élevé par rapport à l'entier $p = 4$. En effet, la recherche d'une solution formelle $\hat{y}(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} y_n(x) \varepsilon^n$ conduit à la récurrence

$$y_1(x) = \frac{1}{x^3}, \quad y_n(x) = \frac{1}{4x^3} \left(y'_{n-1}(x) + x \sum_{k=1}^{n-1} y_k(x) y_{n-k}(x) \right).$$

Il s'ensuit que y_n a un pôle d'ordre $5n - 2$ en $x = 0$. Précisément y_n est de la forme $y_n(x) = x^{-5n+2}(a_n + xP_n(x))$ où P_n est un polynôme et où les nombres a_n satisfont $a_1 = 1$ et pour $n \geq 2$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ donc sont strictement positifs. Ceci est incompatible avec l'existence d'un DAC, c.f. la remarque 1 après la proposition 3.10.

Par ailleurs, il est encore possible d'appliquer notre théorie des DAC sur l'équation (6.53) au point tournant $X = 1, Y = 2$, mais ceci ne sera pas développé dans le présent mémoire.

7 Applications.

Nous présentons trois situations dans lesquelles l'usage des DAC se montre approprié. Notre première application concerne un problème de canard en un point tournant multiple pour une équation analytique, non seulement par rapport à la variable x , mais aussi par rapport au petit paramètre ε . Il s'agit d'une part de donner une condition "formelle" nécessaire et suffisante pouvant être testée sur les coefficients de l'équation pour qu'il existe une solution proche de la courbe lente sur tout un intervalle ouvert contenant le point tournant, ce que nous appelons *canard local*, et d'autre part de montrer, sous l'hypothèse d'analyticité en ε , que lorsqu'il existe un tel canard local, alors il existe aussi un canard global. Autrement dit, il n'y a pas de phénomène de butée pour ce type d'équation. Cette absence de butée avait déjà été démontrée dans [20] dans le cas d'un point tournant simple, puis par Peter De Maesschalck dans le cas d'un point tournant multiple. Nous ajoutons ici la condition formelle. Nous présentons ce résultat d'abord pour l'équation quasi-linéaire de la partie 6.2, puis pour la généralisation de 6.3.

La deuxième application concerne des canards dits *non lisses* ou *angulaires*, car ils longent une courbe lente non dérivable. Ces canards avaient déjà été étudiés par Marc Diener, Emmanuel Isambert et Véronique Gautheron [13, 23, 24], et nous retrouvons une partie de leurs résultats. La théorie des DAC apporte deux nouveautés : d'une part elle permet de donner une approximation des solutions canards uniforme, d'autre part elle fournit des estimations Gevrey des développements asymptotiques. Nous en profitons aussi pour présenter un exemple de DAC convergent.

Enfin, en dernière application, nous résolvons un problème de résonance au sens d'Ackerberg-O'Malley. À l'origine, le problème de la résonance exposé dans [1] est un problème aux limites pour une équation linéaire du second ordre. Dans ce mémoire, nous ne décrivons pas ce problème original mais un problème voisin, sans conditions aux limites. Nous ne décrivons pas non plus sa relation avec le problème de surstabilité pour l'équation de Riccati associée ; nous renvoyons le lecteur à [20] et à la littérature citée là.

7.1 Canards en un point tournant multiple.

On considère l'équation

$$\varepsilon y' = f(x)y + \varepsilon P(x, y, \varepsilon) \quad (7.1)$$

où f est analytique dans un voisinage complexe d'un intervalle réel $[a, b]$ avec $a < 0 < b$, f réelle sur \mathbb{R} , $xf(x) > 0$ si $x \neq 0$, et P analytique au voisinage de $[a, b] \times \{0\} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^3$, $P(x, y, \varepsilon)$ réel si x, y, ε le sont. On suppose de plus que $x = 0$ est un point tournant *multiple*, i.e. $f(x) = \lambda x^{p-1}(1 + \mathcal{O}(x))$ si $x \rightarrow 0$ avec p pair, $p \geq 4$ et $\lambda > 0$. Par commodité, on se ramène à $\lambda = p$. Ceci peut être fait une homothétie en x ou ε .

Un *canard local* est une solution de (7.1) bornée sur un intervalle ouvert contenant 0 ("bornée" sous-entend uniformément par rapport à ε).

Un *canard global* est une solution de (7.1) bornée sur tout $[a, b]$.

Nous sommes dans les conditions d'application de la proposition 6.14. Chacune des deux montagnes de l'axe réel contient une solution qui admet un DAC Gevrey. Notons \mathcal{M}^- la montagne à l'ouest contenant $[a, 0[$ et \mathcal{M}^+ pour celle à l'est contenant $]0, b]$; notons y^- la solution sur \mathcal{M}^- et $\sum_{n \geq 1} \left(a_n(x) + g_n^-\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$ son DAC. De même sur \mathcal{M}^+ , avec les notations similaires :

$$y^+(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} \sum_{n \geq 1} \left(a_n(x) + g_n^+\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n.$$

Théorème 7.1 . *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *Il existe un canard local.*
- (b) *Il existe un canard global.*

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g_n^- \equiv g_n^+$.
(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g_n^-(0) = g_n^+(0)$.

REMARQUES. 1. Dans [20], nous avons établi un lien entre les solutions formelles, les solutions surstables et ce que nous avons appelé les *canards- \mathcal{C}^∞* , c'est-à-dire dont toutes les dérivées sont bornées sur un intervalle $]-\delta, \delta[$ uniformément par rapport à ε . En utilisant ces solutions formelles et surstables, nous montrons dans [20] l'équivalence entre l'existence d'un canard- \mathcal{C}^∞ local et d'un canard- \mathcal{C}^∞ global.

Concernant les canards non nécessairement \mathcal{C}^∞ , la première preuve de l'équivalence entre l'existence d'un canard local et d'un canard global est due à Peter De Maesschalck, c.f. [9], à l'aide d'éclatements ainsi que des résultats Gevrey de [11]. Ici nous ajoutons une condition "formelle", portant sur les DAC : il existe un canard si et seulement si les fonctions de la partie rapide associées aux deux montagnes de l'axe réel coïncident.

2. Pour $m \geq 1$, appelons *canard- \mathcal{C}^m* une solution de (7.1) dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m inclus sont bornées sur un intervalle $]-\delta, \delta[$ (uniformément par rapport à ε). Alors nous pouvons préciser l'énoncé précédent : il existe un canard- \mathcal{C}^m (avec $m \geq 1$) si, et seulement si, d'une part un des énoncés équivalents (a)–(d) est vérifié et d'autre part $g_n^+ \equiv g_n^- \equiv 0$ pour $n = 1, \dots, m - 1$.

3. La preuve montre qu'il y a équivalence entre l'existence d'un canard local et d'une solution bornée pour x dans un domaine contenant non seulement $[a, b]$ mais aussi des secteurs autour de $[a, b]$ (correspondant aux montagnes \mathcal{M}^- et \mathcal{M}^+ et à une partie de leurs vallées adjacentes) et pour η dans un secteur.

4. En pratique, la condition $g_n^- \equiv g_n^+$ peut se vérifier sur les développements formels de solutions de l'équation intérieure. On procède de manière analogue à la remarque à la fin de 6.2.1. L'équation intérieure pour $x = \eta X$, $y(x) = Y(X)$, $\varepsilon = \eta^p$ est de la forme

$$\frac{dY}{dX} = pX^{p-1}Y + \eta G(X, Y, \eta) \quad (7.2)$$

avec $G(X, Y, \eta) = X^p f_1(\eta X)Y + P(\eta X, Y, \eta^p)$, f_1 donnée par $f(x) = px^{p-1} + x^p f_1(x)$. Chacune des deux solutions Y^+ et Y^- correspondant à y^+ et y^- a un développement en puissances de η de la forme $\sum_{n \geq 1} Y_n^\pm(X) \eta^n$ où les Y_n^\pm sont donnés récursivement par

$$\begin{aligned} Y_0^\pm &= 0, & Y_n^+(X) &= \int_{+\infty}^X \exp(X^p - s^p) G_n^+(s) ds, \\ Y_n^-(X) &= \int_{-\infty}^X \exp(X^p - s^p) G_n^-(s) ds, \end{aligned}$$

où G_n^\pm est le coefficient (dépendant de $Y_1^\pm, \dots, Y_{n-1}^\pm$) du terme d'ordre $n-1$ en η obtenu en développant $G(X, \sum_{1 \leq \nu < n} Y_\nu^\pm(X) \eta^\nu, \eta)$ par la formule de Taylor. Par récurrence, si pour $k < n$ on a $Y_k^+ \equiv Y_k^-$, alors $G_n^+ \equiv G_n^-$, et la condition $Y_n^+ \equiv Y_n^-$ est équivalente à $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-s^p) G_n^+(s) ds = 0$ (et donc à $Y_n^+(0) = Y_n^-(0)$). Comme les Y_n^\pm et les g_n^\pm diffèrent par des polynômes et que ces polynômes sont les mêmes pour les cas "+" et "-", cette dernière condition est équivalente à (d). Ceci démontre déjà l'équivalence de (c) et (d).

5. La condition (d) est une suite de conditions polynomiales en les coefficients $(c_k)_{k \geq p}$, $(q_{jkl})_{(j,k,l) \in \mathbb{N}^3}$ des développements de Taylor

$$f(x) = px^{p-1} + \sum_{k \geq p} c_k x^k \text{ et } P(x, y, \varepsilon) = \sum_{(j,k,l) \in \mathbb{N}^3} q_{jkl} x^j y^k \varepsilon^l.$$

Pour voir ceci, on montre par récurrence que les fonctions $Y_n^-(X)$ de la remarque précédente sont des polynômes en $(c_k)_{k \geq p}$, $(q_{jkl})_{(j,k,l) \in \mathbb{N}^3}$ dont les coefficients sont dans l'ensemble \mathcal{F}^- des fonctions contenant 1 et X , stable par sommes, différences, produits et par l'opérateur \mathcal{T}^- défini par

$$\mathcal{T}^-(H)(X) = e^{X^p} \int_{-\infty}^X e^{-T^p} H(T) dT.$$

On remarque que toutes ces fonctions sont à croissance au plus polynomiale quand $X \rightarrow -\infty$ et donc l'intégrale converge toujours.

De manière analogue, les fonctions $Y_n^+(X)$ sont des polynômes en $(c_k)_{k \geq p}$, $(q_{jkl})_{(j,k,l) \in \mathbb{N}^3}$ dont les coefficients sont dans l'ensemble \mathcal{F}^+ analogue à \mathcal{F}^- pour $+\infty$ à la place de $-\infty$. La condition (d), équivalente aux conditions $Y_n^+(0) = Y_n^-(0)$, $n = 0, 1, \dots$ d'après la remarque 4, est donc une suite de conditions polynomiales en $(c_k)_{k \geq p}$, $(q_{jkl})_{(j,k,l) \in \mathbb{N}^3}$ dont les coefficients sont certains nombres connus *a priori*, mais définis de manière « transcendentale ».

Par ailleurs, si f et P sont des polynômes en toutes leurs variables, on a un nombre fini de c_k et q_{jkl} . D'après le *Nullstellensatz* de Hilbert, un nombre fini de ces conditions polynomiales suffit.

Preuve. Nous montrons que (a) implique (c) et que (c) implique (b). L'équivalence de (c) et (d) a été établie dans la remarque 4 et l'implication de (b) à (a) est triviale.

• Supposons (a) et appelons y ce canard local. Comme il doit être exponentiellement proche de y^- en descendant un peu le relief à partir de a , il a le même DAC que y^- pour η dans un intervalle $I =]0, \eta_0[$ et pour x dans un quasi-secteur $V^-(\eta) = V(\pi - \delta, \pi + \delta, \mu|\eta|)$ autour de \mathbb{R}^- , pour certains $\delta, \eta_0, \mu > 0$. De même, il admet aussi le même DAC que y^+ pour η dans I et pour x dans un quasi-secteur $V^+(\eta) = V(-\delta, \delta, |a| - \delta, \mu|\eta|)$ (avec les mêmes δ, η_0, μ , quitte à les diminuer). On a donc, pour tout $\eta \in I$, tout $x \in V^-(\eta) \cap V^+(\eta)$ et tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(a_n(x) + g_n^-\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n = \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_n(x) + g_n^+\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n + \mathcal{O}(\eta^N)$$

d'où on déduit que $g_n^-(X) = g_n^+(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $|X| < \mu$, donc g_n^- et g_n^+ sont des prolongements analytiques l'une de l'autre.

• Pour montrer l'implication de (c) à (b), nous utilisons un argument analogue à celui dans [20]. On considère y^- la solution de condition initiale $y^-(\tilde{a}, \eta) = 0$ et y^+ la solution de condition initiale $y^+(\tilde{b}, \eta) = 0$, où $\tilde{a} < a < b < \tilde{b}$ sont tels que, d'une part f et P sont analytiques pour x dans un voisinage complexe U de $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ et d'autre part $F(\tilde{a}) \neq F(\tilde{b})$, où $F(x) = \int_0^x f$. Pour fixer les idées, on suppose $F(\tilde{a}) < F(\tilde{b})$. Étant donné $\delta > 0$ petit, notons $D^-(\delta, d)$ le domaine contenant $[\tilde{a}, 0]$ dont l'image par F est la réunion du triangle de sommets $F(\tilde{a}), iF(\tilde{a}) \tan \delta, -iF(\tilde{a}) \tan \delta$ et du disque centré en 0 de rayon d . De même, soit $D^+(\delta, d)$ le domaine contenant $[0, \tilde{b}]$ dont l'image par F est la réunion du triangle de sommets $F(\tilde{b}), iF(\tilde{b}) \tan \delta, -iF(\tilde{b}) \tan \delta$ et du disque centré en 0 de rayon d . Si on choisit δ assez petit, pour $\tilde{\delta} > \delta$, $\tilde{\delta}$ arbitrairement proche de δ et pour η_0 assez petit, les solutions y^- , resp. y^+ , sont définies et ont un DAC Gevrey pour η dans le secteur $S = S(-\frac{\pi}{2p} + \frac{\tilde{\delta}}{p}, \frac{\pi}{2p} - \frac{\tilde{\delta}}{p}, \eta_0)$ et pour x dans $D^-(\delta, \delta|\eta|^p)$, resp. $D^+(\delta, \delta|\eta|^p)$. Ceci est démontré en appliquant la remarque 7 de la partie 6.2.4.

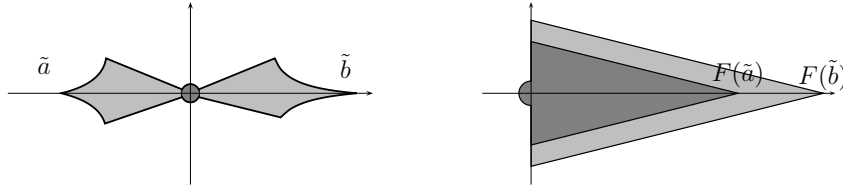


FIGURE 7.1 – Les domaines $D^-(r)$, $D^+(r)$ et leurs images par $F(x) = x^4$. Pour une meilleure visibilité, les longueurs pour les images par F ne correspondent pas à celles des originales.

Considérons la fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{C}$, $\eta \mapsto y^+(0, \eta) - y^-(0, \eta)$. Puisque les solutions y^\pm ont des DAC Gevrey avec les mêmes coefficients g_n , leur différence au point 0 admet un développement asymptotique Gevrey nul. Comme il est bien connu, ceci implique $\varphi(\eta) = \mathcal{O}(\exp(-r(\tilde{\delta})/|\eta|^p))$ pour un certain $r = r(\tilde{\delta}) > 0$ dépendant de $\tilde{\delta}$. On montrera plus tard, pour $\tilde{\delta}, \eta_0 > 0$ assez petits et pour tout $\delta \in]0, \tilde{\delta}[$, que

$$\varphi(\eta) = y^+(0, \eta) - y^-(0, \eta) = \mathcal{O}(-F(\tilde{a}) \sin \delta / |\eta|^p) \quad (7.3)$$

quand $\eta \in S = S(-\frac{\pi}{2p} + \frac{\tilde{\delta}}{p}, \frac{\pi}{2p} - \frac{\tilde{\delta}}{p}, \eta_0)$. Pour $p|\arg \eta| = \frac{\pi}{2} - \tilde{\delta}$, la majoration (7.3) implique $\varphi(\eta) = \mathcal{O}(\exp(-q \frac{F(\tilde{a})}{\eta^p}))$ avec $q = \frac{\sin \delta}{\sin \tilde{\delta}}$ arbitrairement proche de 1. D'après le théorème de Phagmén-Lindelöf, ceci reste valide pour $\arg \eta = 0$. Le lemme de Gronwall montre alors que la solution y^+ est définie et bornée pour des valeurs de x arbitrairement proches de \tilde{a} , donc sur $[a, b]$ tout entier.

Pour la démonstration de (7.3), puisqu'on a supposé que f ne s'annule qu'en 0, il existe g analytique réelle telle que $F(g(t)) = t^p$. Par le changement de variable $x = g(t)$ (et en conservant la notation x au lieu de t) on se ramène au cas où $F(x) = x^p$ et donc $f(x) = px^{p-1}$. À présent on utilise l'existence de $\mu > 0$, et pour tout $\gamma > 0$ d'un entier $L > \frac{1}{4p\gamma}$ et de $\eta_0, \rho > 0$ assez petits, tels qu'il existe des solutions

$z_\ell^\pm(x, \eta)$, $\ell = -L, \dots, L$ de (7.1) définies, holomorphes et bornées quand $\eta \in S_\ell = S(\ell \frac{\pi}{2pL} - \gamma, \ell \frac{\pi}{2pL} + \gamma, \eta_0)$ et $x \in V_\ell^\pm = \pm V(-\frac{3\pi}{2p} + \ell \frac{\pi}{2pL} + 2\gamma, \frac{3\pi}{2p} + \ell \frac{\pi}{2pL} - 2\gamma, \rho, \mu|\eta|)$ qui admettent des DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$

$$z_\ell^\pm \sim \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_n(x) + g_n^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n$$

Ceci est une conséquence du théorème 6.12 et de rotations $\eta = e^{i\psi} \tilde{\eta}$, $x = \pm e^{i\psi} \tilde{x}$ avec $\psi = \ell \frac{\pi}{2pL}$; le fait que les fonctions a_n et g_n^\pm sont indépendantes de ℓ est dû à l'unicité de la solution formelle de (7.1), i.e. au théorème 6.4.

Or d'après notre hypothèse (c), pour tout ℓ , les fonctions $z_\ell^+(0, \eta)$ et $z_\ell^-(0, \eta)$ ont le même développement asymptotique qui est aussi Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ en η et sont donc exponentiellement proches l'une de l'autre. Il existe donc $s > 0$ tel que

$$z_\ell^+(0, \eta) - z_\ell^-(0, \eta) = \mathcal{O}(e^{-s/|\eta|^p}) \quad (7.4)$$

quand $\ell \in \{-L, \dots, L\}$ et $\eta \in S_\ell$. Quitte à réduire ρ , on peut supposer que $\rho^p < s$.

Considérons maintenant $\tilde{\delta} > 0$ tel que $F(\tilde{a}) \sin \tilde{\delta} < \rho^p$ et $\delta \in]0, \tilde{\delta}[$ arbitraire. Soit $\ell \in \{-L, \dots, L\}$ et $\eta \in S_\ell \cap S$, $\arg \eta = \psi$. Alors $y^+(x, \eta)$ et $z_\ell^+(x, \eta)$ sont holomorphes bornées sur un voisinage du segment $x \in [0, Te^{i\psi}]$ où $T^p = F(\tilde{a}) \sin \delta$. Comme leur différence $D = y^+ - z_\ell^+$ satisfait $\eta^p D' = (px^{p-1} + \eta^p \Delta_2 P(x, z_\ell^+(x, \eta), y^+(x, \eta), \eta^p)) D$, on en déduit que

$$\begin{aligned} y^+(0, \eta) - z_\ell^+(0, \eta) &= \mathcal{O}(\exp(-(Te^{i\psi})^p / \eta^p)) \\ &= \mathcal{O}(e^{-T^p / |\eta|^p}) \text{ quand } \eta \in S_\ell \cap S. \end{aligned} \quad (7.5)$$

De manière analogue, on montre que $y^-(0, \eta) - z_\ell^-(0, \eta) = \mathcal{O}(e^{-T^p / |\eta|^p})$ quand $\eta \in S_\ell \cap S$. Avec (7.5) et (7.4), ceci implique (7.3) quand $\eta \in S_\ell \cap S$. Comme l'union des S_ℓ contient S , la démonstration de (7.3) est donc complète. \square

Le théorème 7.1 peut être généralisé pour l'équation (6.48) du corollaire 6.16, i.e. pour

$$\varepsilon y' = f(x)y + \varepsilon h(x, \varepsilon) + y P(x, y, \varepsilon)$$

avec f analytique dans D_1 , $f(x) = px^{p-1} + \mathcal{O}(x^p)$ quand $x \rightarrow 0$, p pair et avec h et P analytiques bornées dans $D_1 \times \Sigma$, resp. $D_1 \times D_2 \times \Sigma$ et admettant chacune un développement asymptotique uniforme Gevrey d'ordre 1 quand $\Sigma \ni \varepsilon \rightarrow 0$, où D_1 est un voisinage de l'intervalle $[a, b]$, $D_2 = D(0, r_2)$ et $\Sigma = S(-\delta, \delta, \varepsilon_0)$, et où $-a, b, r_2, \varepsilon_0, \delta > 0$, δ assez petit. On suppose de plus que les valeurs des fonctions f, h, P sont réelles quand leurs arguments sont réels et qu'il existe $r \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que, d'une part $h(x, 0) = \mathcal{O}(x^{r-1})$, $x \rightarrow 0$ et d'autre part

$$P(x, y, 0) = \sum_{k \geq 0, l \geq 1, k+r \geq p-1} p_{kl} x^k y^l.$$

D'après le corollaire 6.16, l'équation admet des solutions $y^\pm(x, \eta)$ holomorphes dans l'ensemble des (x, η) avec $|\arg \eta| < \delta$, $|\eta| < \eta_0$, $x \in V^+(\eta) =$

$V(-\beta, \beta, b, \mu|\eta|)$, respectivement $x \in V^-(\eta) = V(\pi - \beta, \pi + \beta, |a|, \mu|\eta|)$ avec certains $\delta, \eta_0, \beta > 0$ et un certain $\mu < 0$ pour δ assez petit. Ces solutions admettent des DAC

$$y^\pm(x, \eta) \sim \sum_{n=r}^{p-1} g_n^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^n + \sum_{n=p}^{\infty} \left(a_n(x) + g_n^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right)\right) \eta^n. \quad (7.6)$$

Contrairement à l'équation (7.1), les domaines d'existence des solutions ont *a priori* une intersection vide. Ceci nécessite des modifications de l'énoncé du théorème et de sa preuve.

Théorème 7.2 . *Sous les conditions et avec les notations précédentes, les énoncés suivants sont équivalents.*

- (a) *Il existe un canard local y avec $y(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta^r)$ uniformément dans un voisinage de $x = 0$.*
- (b) *Il existe un canard global y avec $y(x, \eta) = \mathcal{O}(\eta^r)$ uniformément sur $[a, b]$.*
- (c) *Les fonctions $g_n^\pm(X)$ peuvent être prolongées analytiquement en un voisinage de \mathbb{R} et ces prolongements coïncident, i.e. $g_n^+ \equiv g_n^-$ pour tout n .*

Preuve. La preuve que (c) implique (a) est presque identique à celle du théorème 7.1. La seule observation à ajouter est la suivante : puisque $g_r^+ = g_r^-$ sont analytiques sur \mathbb{R} , on peut appliquer le corollaire 6.17 et on obtient que $y^+(x, \eta)$ et son DAC se prolongent dans un certain quasi-secteur $V(-\tilde{\beta}, \tilde{\beta}, b, \tilde{\mu}|\eta|)$ avec $\tilde{\beta}, \tilde{\mu} > 0$; pour y^- et les z_ε^\pm de la preuve de théorème 7.1, l'énoncé analogue est vrai. Le reste de la preuve est inchangé.

La preuve que (c) est une conséquence de (a) nécessite l'utilisation de l'équation intérieure. Le théorème sur les DAC de (6.48) dit seulement que le canard local $y(x, \eta)$ admet un DAC sur $[a + \delta, -L\eta]$, $L = |\mu|$, (et même dans $V^+(\eta) \cap D(0, |a| - \delta)$) et un autre DAC sur $[L\eta, b - \delta]$. Pour la solution $Y(X, \eta) = \eta^{-r} y(\eta X, \eta)$ de l'équation intérieure, ceci implique que ses valeurs $U^\pm(\eta) = Y(\pm L, \eta)$ admettent des développements asymptotiques Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ quand $\eta \rightarrow 0$. Par hypothèse, la fonction Y est bornée sur $[-L, L] \times]0, \eta]$. Comme les valeurs de $Y'(X, \eta)$ sont exprimées par l'équation intérieure

$$Y' = pX^{p-1}Y + \tilde{P}(X, Y, \eta)$$

avec

$$\tilde{P}(X, Y, \eta) = \eta^{1-r} h(\eta X, \eta) + \eta^{1-p} Y P(\eta X, \eta^r Y, \eta^p),$$

et donc par une équation différentielle régulièrement perturbée, ces valeurs sont aussi bornées. Le théorème d'Arzela-Ascoli montre que toute suite $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres strictement positifs tendant vers 0 admet une sous-suite $(\eta_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(Y(X, \eta_{k_l}))_{l \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-L, L]$; la limite est nécessairement la solution G de l'équation intérieure réduite

$$Y' = pX^{p-1}Y + cX^{r-1} + YQ(X, Y), \quad Q(X, Y) = \sum_{\substack{k \geq 0, l \geq 1 \\ k+r+l=p-1}} p_{kl} X^k Y^l, \quad (7.7)$$

avec la condition initiale $G(L) = \lim_{\eta \rightarrow 0} U^+(\eta)$. On obtient donc ici que les premiers termes $g_r^\pm(X)$ des DAC peuvent être prolongés sur \mathbb{R} et coïncident. Comme ci-dessus, on conclut que les DAC peuvent être prolongés sur des quasi-secteurs avec un certain $\tilde{\mu} > 0$. Le reste de la preuve est comme celle du théorème 7.1. \square

REMARQUE . Les conditions ne sont plus équivalentes à une suite de conditions polynomiales comme dans la remarque 5. après le théorème 7.1 ; elles sont transcendentes en c et les p_{kl} de (7.7).

7.2 Canards non lisses.

Equations de type « Union Jack » .

On considère une équation différentielle de la forme

$$\varepsilon y' = y(y-x)(y+x) + P(x, y, \varepsilon) + \varepsilon c, \quad (7.8)$$

où P est analytique sur $D_1 \times D(0, r) \times D(0, \varepsilon_1)$, D_1 un voisinage d'un intervalle $[a, b]$, $a < 0 < b$, $r > \max(|a|, b)$ et $c \in \mathbb{C}$ un paramètre additionnel. *A priori* les exemples étudiés concernent des fonctions P réelles pour des arguments réels de x, y, ε , mais pour des fonctions P à valeurs complexes cela ne change rien. On fait l'hypothèse que $P(0, 0, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ et que la valuation homogène de $P(x, y, 0)$ est au moins 4, i.e. il existe des $p_{kl} \in \mathbb{C}$ tels que

$$P(x, y, 0) = \sum_{k+l \geq 4} p_{kl} x^k y^l, \quad \text{pour } |x|, |y| \text{ assez petits.} \quad (7.9)$$

L'ensemble lent de (7.8), d'équation $y(y-x)(y+x) + P(x, y, 0) = 0$, peut être désingularisé par un éclatement $y = xz$. On obtient l'équation $z(z-1)(z+1) + xQ(x, z) = 0$ avec $Q(x, z) = x^{-4}P(x, xz, 0)$ analytique dans $D_1 \times D(0, 1+\delta)$, $\delta > 0$, à laquelle on peut appliquer le théorème des fonctions implicites aux points $(0, 0)$ et $(0, \pm 1)$. On a ainsi localement trois courbes

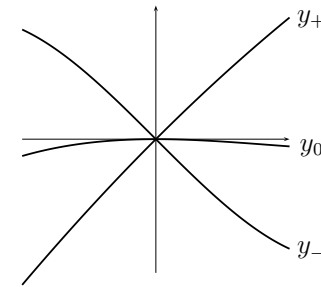


FIGURE 7.2 – Les branches y_- , y_+ et y_0 .

lentes analytiques $y_0(x) = \mathcal{O}(x^2)$ et $y_\pm(x) = \pm x + \mathcal{O}(x^2)$. L'équation (7.8) est dite de type *Union Jack* car l'équation « modèle » $\varepsilon y' = y(y-x)(y+x) + \varepsilon c$ a

pour ensemble lent la réunion des trois droites $y = 0$ et $y = \pm x$, et ressemble donc au drapeau du Royaume-Uni. Les trois courbes lentes y_0 , y_+ et y_- du cas général forment ainsi un « Union Jack modifié ».

Par ailleurs, les droites $y = 0$ et $y = \pm x$ sont aussi des solutions particulières de l'équation modèle pour certaines valeurs de c : la solution $y \equiv 0$ pour $c = 0$, $y \equiv x$ pour $c = 1$ et $y \equiv -x$ pour $c = -1$. Il en est de même pour l'équation intérieure réduite de (7.8), obtenue en posant $x = \eta X$, $y = \eta Y$, $\varepsilon = \eta^3$ et en faisant tendre η vers 0, i.e.

$$Y' = Y(Y - X)(Y + X) + c. \quad (7.10)$$

Quelque soit la valeur de c , l'équation (7.10) admet une unique solution

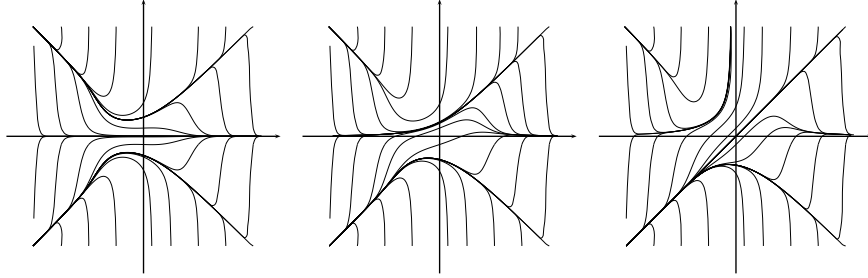


FIGURE 7.3 – Trois portraits de phase de l'équation (7.10), pour $c = 0$, $c = 0.3621759411$ et $c = 1$.

$Y_g(X, c)$ telle que $Y_g(X, c) \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow -\infty$; en effet, cette équation est de la forme $Y' = -X^2Y + \mathcal{O}(1 + |X|)$ quand Y reste bornée. Pour une raison analogue, il existe, pour toute valeur de c , deux solutions uniques $Y_d^\pm(X, c)$ telles que $Y_d^\pm(X, c) \sim \pm X$ quand $X \rightarrow +\infty$. On vérifie que $Y_0(X, c) = \mathcal{O}(X^{-2})$ quand $X \rightarrow -\infty$ et $Y_d^\pm(X, c) = \pm X + \mathcal{O}(X^{-2})$ quand $X \rightarrow \infty$; ceci est le cas uniformément pour des compacts en c .

Il a été démontré dans [13] que (7.10) admet une valeur unique $c = c_0 \in]0, 1[$, telle que Y_g et Y_d^+ coïncident, i.e. $Y_g(X, c_0) \equiv Y_d^+(X, c_0) \equiv: Y_0(X)$. Cette valeur de c est une valeur à long canard pour l'équation correspondante $\varepsilon y' = y(y - x)(y + x) + \varepsilon c$ car la solution $y(x, \varepsilon) = Y_0(\frac{x}{\eta})$ est attractive quand $x \leq \delta < 0$ et répulsive quand $x \geq \delta > 0$; il s'agit d'un canard *non lisse* car la limite uniforme $z(x)$ de $y(x, \varepsilon)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ est $z(x) = 0$ quand $x \leq 0$ et $z(x) = x$ quand $x > 0$: la courbe lente associée n'est pas dérivable. Par ailleurs, la valeur $c = -c_0$ est aussi une valeur à canard non lisse : par symétrie les solutions Y_g et Y_d^- coïncident pour cette valeur de c .

Le résultat qui suit répond à la question naturelle si ce phénomène persiste pour l'équation complète (7.8) et si on peut décrire les valeurs à canards et les solutions canards correspondantes. Cette question a été résolue par M. Diener [13] et E. Isambert [24] à l'exception d'approximations uniformes des

solutions canards et du caractère Gevrey des développements asymptotiques. Notre théorie des DAC se révèle particulièrement bien adaptée à ce contexte.

Théorème 7.3 . *Avec les hypothèses et notations précédentes, on suppose que la courbe lente $y_0(x)$ peut être prolongée analytiquement sur $[a, \delta]$ et la courbe lente $y_+(x)$ sur $[-\delta, b]$ avec un certain $\delta > 0$. On suppose que le prolongement, encore noté $y_0(x)$, est attractif, i.e. $3y_0(x)^2 - x^2 + \frac{\partial P}{\partial y}(x, y_0(x), 0) < 0$ sur $[a, 0[$, tandis que le prolongement encore noté $y_+(x)$ est répulsif sur $]0, b]$.*

Alors l'équation (7.8) admet une valeur à canard non lisse $c = c(\eta)$ et une solution canard $y(x, \eta)$ correspondante telles que $y(x, \eta) - z(x) = \mathcal{O}(\eta)$, où $z(x) = y_0(x)$ quand $x \leq 0$ et $z(x) = y_+(x)$ quand $x > 0$.

De plus, la fonction $c = c(\eta)$ admet un développement asymptotique Gevrey d'ordre $\frac{1}{3}$ de la forme

$$c(\eta) \sim_{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \eta^n$$

avec pour premier terme la valeur c_0 introduite précédemment. De même, la fonction y admet des DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{3}$

$$y(x, \eta) \sim_{\frac{1}{3}} y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{gn}(x) + b_{gn}\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \quad (7.11)$$

quand $\eta \rightarrow 0$ et $x \in [a, L\eta]$ pour $L > 0$ arbitraire et

$$y(x, \eta) \sim_{\frac{1}{3}} y_+(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{dn}(x) + b_{dn}\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \quad (7.12)$$

quand $\eta \rightarrow 0$ et $x \in [-L\eta, b]$ pour $L > 0$ arbitraire où les a_{gn} sont analytiques sur un voisinage (complexe) de $[a, \delta]$, les a_{dn} sur un voisinage de $[-\delta, b]$ et où les b_{gn} et les b_{dn} sont analytiques sur un voisinage de \mathbb{R} . Les fonctions b_{gn} admettent des développements Gevrey d'ordre $\frac{1}{3}$ compatibles au sens de (4.1) quand $X \rightarrow -\infty$, les b_{dn} quand $X \rightarrow +\infty$.

Enfin, l'énoncé analogue est vrai pour $y_-(x)$ à la place de $y_+(x)$.

REMARQUES . 1. La série asymptotique $\widehat{c}(\eta)$ de $c(\eta)$ et les séries formelles combinées du théorème se calculent comme avant à partir des développements extérieurs et intérieurs. Néanmoins, ici il faut commencer par le développement intérieur pour pouvoir déterminer $\widehat{c}(\eta)$; ceci a été fait par E. Isambert dans [24]. Remarquons que les deux développements intérieurs doivent coïncider, i.e. $y(\eta X, \eta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} u_n(X) \eta^n =: \eta \widehat{Y}(X, \eta)$ avec une solution formelle de l'équation intérieure $\widehat{Y}(X, \eta)$ avec $c = \widehat{c}(\eta)$ dont les

coefficients $u_n(X)$ ont une croissance polynomiale quand $X \rightarrow +\infty$ et $X \rightarrow -\infty$. On montre (comme dans [24]) que ceci détermine uniquement les valeurs des c_n et les fonctions $u_n(X)$. Par exemple, on a la relation $b_{g1}(X) = u_1(X) = Y_0(X) = X + b_{d1}(X)$.

Les parties lentes des DAC (7.11) et (7.12) sont ensuite déterminées de façon usuelle comme étant les parties non polaires des solutions formelles extérieures de (7.8) avec $c = \tilde{c}(\eta)$ pour les courbes lentes $y_0(x)$, respectivement $y_+(x)$. Ceci implique par exemple $a_{gn} = 0$ et $a_{dn} = 0$ pour $n = 1$ et 2 .

2. Comme cela est classique dans les problèmes de canards, il n'y a pas unicité des valeurs à canard $c(\eta)$ ni des solutions canards correspondant à une valeur à canard : une modification de $c(\eta)$ ou de la condition initiale par un terme exponentiellement petit $\mathcal{O}(e^{-K/|\eta|^p})$ avec $K > 0$ suffisamment grand ne change pas la conclusion du théorème. Réciproquement, deux valeurs à canard sont exponentiellement proches. Ceci peut se démontrer avec la variation de la constante, c.f. par exemple [3, 5, 8], ou encore [21] et les références qui y sont incluses.

Preuve. Sur un voisinage de 0, disons $|x| < \gamma$, on fait le changement de variable $y = y_0(x) + z$. L'équation obtenue s'écrit d'abord sous la forme

$$\begin{aligned} \varepsilon z' &= Q(x, z, \varepsilon) + \varepsilon c \\ &:= (z + y_0(x))(z + y_0(x) - x)(z + y_0(x) + x) + \\ &\quad P(x, z + y_0(x), \varepsilon) - \varepsilon y_0'(x) + \varepsilon c. \end{aligned}$$

Par construction, on a $Q(x, 0, 0) \equiv 0$; la fonction $\tilde{P} : (x, z, 0) \mapsto Q(x, z, 0) - z(z - x)(z + x)$ satisfait une propriété analogue à (7.9). L'équation précédente peut donc être écrite

$$\varepsilon z' = r(x)z + \varepsilon(c + s(x, \varepsilon)) + zR(x, z, \varepsilon), \quad (7.13)$$

où on a décomposé $Q(x, z, \varepsilon) = r(x)z + \varepsilon s(x, \varepsilon) + zR(x, z, \varepsilon)$, i.e. $r(x) = \frac{\partial Q}{\partial z}(x, 0, 0) = -x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ et $s(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}Q(x, 0, \varepsilon)$ satisfait $s(0, 0) = 0$. D'après notre hypothèse sur P et l'observation précédente pour \tilde{P} , la fonction R peut donc être développée pour $\varepsilon = 0$

$$R(x, z, 0) = z^2 + \sum_{k \geq 0, l \geq 1, k+l \geq 3} R_{kl} x^k z^l,$$

quand $|x| < \gamma$, $|z|$ petite.

Après l'homothétie $x \rightarrow -\sqrt[3]{3}x$, l'équation (7.13) entre donc dans le cadre du corollaire 6.16 avec $p = 3$ et $r = 1$. De plus, son équation intérieure réduite est $Z' = Z(Z - X)(Z + X) + c$. La solution de cette dernière équation dont le comportement asymptotique est de la forme $\text{const. } X^{-2}$ quand X tend vers $-\infty$ est Y_g . Quand $c = c_0$, celle-ci coïncide avec Y_d^+ ; en particulier, elle peut être prolongée analytiquement sur \mathbb{R} . Il existe donc un voisinage $|c - c_0| < \rho$ tel que Y_g peut être prolongée sur $[-\infty, M]$ avec un certain $M > 0$. Maintenant on applique le corollaire 6.17. On obtient que (7.13) admet une solution $z = z(x, c, \eta) = \mathcal{O}(\eta)$ ayant un DAC quand $\eta \rightarrow 0$, $x \in V(-\beta, \beta, \gamma, L\eta)$ et $|c - c_0| < \rho$ avec un certain $L > 0$. Or il est bien connu que notre hypothèse d'attractivité de $y_0(x)$ sur $[a, 0]$ entraîne

que la solution de (7.13) avec condition initiale 0 en un point un peu avant a admet un développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 en ε sans terme constant sur l'intervalle $[a, -\gamma/2]$, disons. Elle est donc exponentiellement proche de la solution $z = z(x, c, \eta)$ construite ci-dessus, uniformément pour $x \in [-\gamma, -\gamma/2]$ et $|c - c_0| < \rho$. Ainsi, on obtient l'existence d'une solution $y_g(x, c, \eta)$ de (7.8) analytique pour $\eta \in S(-\alpha, \alpha, \eta_1)$, $x \in V(\pi - \beta, \pi + \beta, |a|, L\eta)$ et $|c - c_0| < \rho$, pour certains $L, \eta_1, \alpha, \beta > 0$, ayant un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{3}$

$$y_g(x, c, \eta) \sim \frac{1}{3} y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{gn}(x, c) + b_{gn}\left(\frac{x}{\eta}, c\right) \right) \eta^n, \quad (7.14)$$

où $b_{g1}(X, c) = Y_g(X, c)$.

Comme l'équation obtenue de (7.8) par $y = y_+(x) + z$ entre aussi dans le cadre du corollaire 6.17, on obtient en utilisant ici la répulsivité de y_+ sur $]0, b]$ l'existence d'une solution $y_d(x, c, \eta)$ de (7.8) analytique pour $\eta \in S(-\alpha, \alpha, \eta_1)$, $x \in V(-\beta, \beta, b, L\eta)$ et $|c - c_0| < \rho$ admettant un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{3}$

$$y_d(x, c, \eta) \sim \frac{1}{3} y_+(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{dn}(x, c) + b_{dn}\left(\frac{x}{\eta}, c\right) \right) \eta^n, \quad (7.15)$$

où $b_{d1}(X, c) + X = Y_d^+(X, c)$.

On obtient des valeurs à canards non lisses du théorème en résolvant l'équation

$$y_g(0, c, \eta) = y_d(0, c, \eta). \quad (7.16)$$

Il faut donc montrer que la solution $c = c(\eta)$ existe et qu'elle a les propriétés énoncées, ainsi que les fonctions $y_{g|d}(x, c(\eta), \eta)$.

On applique le théorème des fonctions implicites à l'équation (7.16) modifiée en

$$f(c, \eta) = 0, \text{ où } f(c, \eta) = \frac{1}{\eta}(y_g(0, c, \eta) - y_d(0, c, \eta)). \quad (7.17)$$

On a d'abord l'égalité $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} y_g(0, c_0, \eta) = Y_0(0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} y_d(0, c_0, \eta)$ et donc $\lim_{\eta \rightarrow 0} f(c_0, \eta) = 0$. On montrera que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \frac{\partial y_g}{\partial c}(0, c_0, \eta) \neq \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \frac{\partial y_d}{\partial c}(0, c_0, \eta) \quad (7.18)$$

et donc $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial c}(c_0, \eta) \neq 0$. Les conditions du théorème des fonctions implicites sont donc satisfaites et on obtient l'existence d'une solution $c = c(\eta)$ de (7.16) avec $c(0) = c_0$. *A priori*, ce théorème dit seulement que c est une fonction continue, mais la formule

$$c(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x-c_0|=\rho/2} \frac{x \frac{\partial f}{\partial c}(x, \eta)}{f(x, \eta)} dx$$

en combinaison avec la compatibilité des développements Gevrey avec les opérations élémentaires montre qu'elle admet un développement Gevrey d'ordre $\frac{1}{3}$ quand $\eta \rightarrow 0$ dans un secteur $S(-\alpha, \alpha, \eta_2)$ avec un certain $\eta_2 > 0$. À l'aide du théorème 5.7 (a), on obtient que les compositions $(x, \eta) \mapsto y_g(x, c(\eta), \eta)$ et $(x, \eta) \mapsto y_d(x, c(\eta), \eta)$ admettent des DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{3}$. En tant que solutions de la même équation (7.8) avec la même condition initiale $y_g(0, c(\eta), \eta) = y_d(0, c(\eta), \eta)$,

elles coïncident. Ceci démontre les énoncés du théorème, en particulier (7.11) et (7.12) dont les coefficients peuvent être obtenus en développant $a_{g|d,n}(x, \tilde{c}(\eta)) = a_{g|d,n}(x, c_0) + \dots$ respectivement $b_{g|d,n}(X, \tilde{c}(\eta))$ par la formule de Taylor dans (7.14) et (7.15).

Pour la démonstration de (7.18), on utilise que les DAC de $y_{g|d}$ sont uniformes par rapport à c dans un voisinage complexe de c_0 . On peut donc obtenir les dérivées partielles par rapport à c en utilisant la formule de Cauchy ; par conséquent les dérivées partielles ont aussi des DAC et ces DAC sont obtenus en dérivant ceux de $y_{g|d}$ terme à terme. Une comparaison avec le développement extérieur (voir section 3.4) montre que $a_{g1} = 0$ et $a_{d1} = 0$, donc $\frac{\partial y_d}{\partial c}(0, c_0, \eta) = \eta Z_g(0, c_0) + \mathcal{O}(\eta^2)$ avec $Z_g = \frac{\partial Y_g}{\partial c}$ et $\frac{\partial y_d}{\partial c}(0, c_0, \eta) = \eta Z_d(0, c_0) + \mathcal{O}(\eta^2)$ avec $Z_d = \frac{\partial Y_d^+}{\partial c}$. Or les fonctions $X \mapsto Z_{g|d}(X, c_0)$ sont des solutions de l'équation (7.10) dérivée par rapport à c prise en $c = c_0$ et pour $Y = Y_g(X, c_0) = Y_0(X)$, resp. $Y = Y_d^+(X, c_0) = Y_0(X)$. Autrement dit, ce sont des solutions de

$$Z' = (3Y_0(X)^2 - X^2)Z + 1.$$

Précisément, $Z_g(X, c_0)$ est la solution tendant vers 0 quand $X \rightarrow -\infty$ et $Z_d(X, c_0)$ celle tendant vers 0 quand $X \rightarrow +\infty$. Notons $I_0(X)$ la primitive de $3Y_0(X)^2$ s'annulant en $X = 0$ et $J_0(X)$ celle de $3Y_0(X)^2 - 3X^2$ s'annulant en $X = 0$. Puisque $3Y_0(X)^2 = \mathcal{O}(X^{-1})$ quand $X \rightarrow -\infty$ et $3Y_0(X)^2 - 3X^2 = \mathcal{O}(X^{-1})$ quand $X \rightarrow +\infty$, ces primitives ont une croissance au plus logarithmique en $-\infty$, resp. $+\infty$. La formule de variation de la constante donne alors

$$Z_g(0, c_0) = \int_{-\infty}^0 \exp(X^3/3 - I_0(X)) dX > 0$$

et

$$Z_d(0, c_0) = - \int_0^{\infty} \exp(-2X^3/3 - J_0(X)) dX < 0.$$

Ceci démontre (7.18) et la preuve du théorème est complète. \square

Bien entendu, la théorie des DAC n'est pas indispensable pour démontrer l'existence de valeurs à canards pour (7.8) ou des équations similaires, ni le fait que le côté droit de l'équation différentielle soit analytique. En effet, on pourrait utiliser le théorème du point fixe comme dans la preuve du théorème 6.15 pour montrer l'existence de $y_g(x, c, \eta)$ et de $y_d(x, c, \eta)$ pour $x \in [a, -L\eta]$, resp. $x \in [L\eta, b]$, et ensuite les prolonger sur $[a, 0]$ resp. $[0, b]$ en utilisant l'équation différentielle intérieure. Une valeur à canard $c = c(\eta)$ possible est alors la solution de l'équation $y_g(0, c, \eta) = y_d(0, c, \eta)$ dont on assure l'existence par le théorème des fonctions implicites. Le fait crucial qu'une certaine dérivée partielle ne s'annule pas est alors démontré — comme ci-dessus — en se ramenant à une certaine équation différentielle linéaire pour le paramètre $\eta = 0$. De ce point de vue, le problème de l'existence de valeurs à canards traité dans cette partie est plus simple que, par exemple, celui de conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de canards d'équations différentielles *sans paramètres* traité dans la partie 7.1 ou celui de la résonance d'Ackerberg-O'Malley traité dans la partie 7.3. Toutefois, la théorie

des DAC apporte deux nouvelles propriétés des valeurs à canards non lisses : d'une part elle permet de donner une approximation uniforme des solutions canard, précisément notre DAC, et d'autre part les développements asymptotiques de la fonction $c = c(\eta)$ et des solutions canard sont Gevrey. Ceci peut servir par exemple à démontrer qu'une sommation "au plus petit terme" dans l'esprit de ce qui est fait dans [19] fournit une valeur à canard.

Equations non analytiques.

Les canards du théorème 7.3 sont appelés non lisses car la courbe lente associée n'est pas lisse. En revanche, pour chaque ε , les solutions canards de l'équation analytique (7.8) sont bien sûr analytiques en x . Dans la suite nous voulons indiquer comment la théorie des DAC s'applique aussi à des problèmes de canards pour des équations différentielles non lisses.

Il s'agit des équations du type *canard angulaire*

$$\varepsilon y' = (y - f(x))(y - g(x)) + \varepsilon c, \quad (7.19)$$

où $f(x) = \alpha x + \mathcal{O}(x^2)$, $g(x) = \beta x + \mathcal{O}(x^2)$, $\alpha \neq \beta$ et où les restrictions de f et g à des intervalles $[0, b]$, resp. $[a, 0]$ sont des fonctions réelles analytiques, mais où f et g ne sont pas supposées C^∞ sur $[a, b]$. On suppose que la

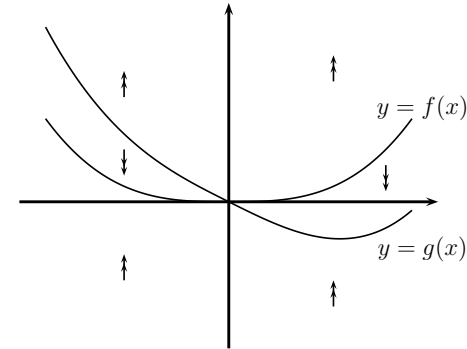


FIGURE 7.4 – Les courbes lentes de (7.19) et l'orientation du champ.

courbe lente $y = f(x)$ est attractive pour $x \in [a, 0]$ et répulsive pour $]0, b]$, i.e. $x(f(x) - g(x)) \geq 0$ sur $[a, b]$; en particulier on a $\alpha > \beta$. L'exemple classique de [24] correspond à $f(x) = |x|^3/3$ et $g(x) = -x + |x|^3/3$. Dans un autre exemple de [23, 24], on a $f(x) = x(1 + |x|)$ et $g = -f$.

Traisons d'abord les solutions sur l'intervalle $[0, b]$. On écrit l'équation différentielle sur un voisinage complexe de $[0, b]$ avec les prolongements analytiques f_+, g_+ des restrictions $f|_{[0, b]}$ et $g|_{[0, b]}$

$$\varepsilon y' = (y - f_+(x))(y - g_+(x)) + \varepsilon c. \quad (7.20)$$

Le changement de variable $y = f_+(x) + z$ mène alors à l'équation

$$\varepsilon z' = (f_+(x) - g_+(x))z + z^2 + \varepsilon(c - f'_+(x))$$

qui entre, après une homothétie sur la variable x , dans le cadre du corollaire 6.16 avec $p = 2$, $r = 1$. Pour un voisinage $|c| < \rho$, ρ assez petit, on peut comme avant utiliser le corollaire 6.17; la répulsivité permet comme dans la preuve ci-dessus d'obtenir une solution ayant un DAC jusqu'à b . On obtient qu'il existe une solution holomorphe $y = y_d(x, c, \eta)$ de (7.20) pour $\eta \in S(-\alpha, \alpha, \eta_1)$, $x \in V(-\beta, \beta, b, L\eta)$ et $|c| < \rho$ avec certains $\alpha, \eta_1, \beta, L, \rho > 0$ assez petits et qu'elle admet un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{2}$

$$y_d(x, c, \eta) \sim \frac{1}{2} \widehat{y}_d(x, c, \eta) := f_+(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{dn}(x, c) + b_{dn}(\frac{x}{\eta}, c)) \eta^n \quad (7.21)$$

avec $a_{d1} = 0$ et $b_{d1}(X, c) = U_d(X, c)$, où U_d est la solution de l'équation intérieure réduite

$$U' = (\alpha - \beta)XU + U^2 + c \quad (7.22)$$

tendant vers 0 quand $X \rightarrow +\infty$. On vérifie, comme à la fin de la preuve du théorème 7.3, que $\frac{\partial U_d}{\partial c}(0, 0) < 0$.

Pour l'intervalle $[a, 0]$, l'équation (7.19) se simplifie aussi en une équation analytique

$$\varepsilon y' = (y - f_-(x))(y - g_-(x)) + \varepsilon c \quad (7.23)$$

avec les prolongements analytiques f_- et g_- des restrictions $f|_{[a, 0]}$ et $g|_{[a, 0]}$ sur un voisinage complexe de $[a, 0]$. On obtient ici l'existence d'une solution holomorphe $y = y_g(x, c, \eta)$ de (7.23) pour $\eta \in S(-\alpha, \alpha, \eta_1)$, $x \in V(\pi - \beta, \pi + \beta, |a|, L\eta)$ et $|c| < \rho$ avec certains $\alpha, \eta_1, \beta, L, \rho > 0$ petits et ayant un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{2}$

$$y_g(x, c, \eta) \sim \frac{1}{2} \widehat{y}_g(x, c, \eta) := f_-(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{gn}(x) + b_{gn}(\frac{x}{\eta})) \eta^n \quad (7.24)$$

avec $a_{g1} = 0$ et $b_{g1}(X, c) = U_g(X, c)$, où U_g est la solution de la même équation intérieure réduite (7.22) tendant vers 0 quand $X \rightarrow -\infty$. On vérifie que $\frac{\partial U_g}{\partial c}(0, 0) > 0$.

En appliquant le théorème des fonctions implicites à l'équation $\frac{1}{\eta} y_g(0, c, \eta) = \frac{1}{\eta} y_d(0, c, \eta)$ au voisinage de $c = 0$ comme dans la preuve du théorème 7.3, on déduit de nouveau l'existence de valeurs à canards non lisses $c = c(\eta)$ ayant un développement asymptotique $\widehat{c}(\eta)$ Gevrey d'ordre $\frac{1}{2}$ et l'existence de DAC Gevrey pour la solution canard définie par $y(x, \eta) = y_g(x, c(\eta), \eta)$ quand $x \leq 0$ et par $y(x, \eta) = y_d(x, c(\eta), \eta)$ quand $x \geq 0$ sur les intervalles $[a, 0]$ resp. $[0, b]$.

A priori, $\widehat{c}(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \eta^n$ est une série formelle en puissances de η ; la théorie des DAC nous apprend déjà que cette série est Gevrey. En complément

à cette étude, nous redémontrons et améliorons ci-dessous un résultat de [24]. C'est l'occasion de présenter un DAC convergent, le seul dans ce mémoire. Ce DAC est en fait obtenu par un développement de Taylor d'une fonction spéciale.

Proposition 7.4 . *Dans le cas du canard angulaire classique, i.e. (7.19) avec $f(x) = |x|^3/3$ et $g(x) = -x + |x|^3/3$, la série formelle associée aux valeurs à canard*

$$c(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{4m} \eta^{4m} \quad (7.25)$$

ne contient que des puissances multiples de 4 et elle converge.

REMARQUES . 1. E. Isambert [24] a démontré la forme (7.25) de la série formelle associée aux valeurs à canards. Nous montrons, de plus, sa convergence.

2. Pour cette équation modèle, on peut aussi exprimer les solutions de façon plus simple et on obtient des DAC très particuliers comme nous le verrons dans la preuve et à la fin de cette partie.

Preuve. Dans la suite, nous utilisons seulement ε , car la plupart des fonctions qui entrent en jeu sont des fonctions de cette variable, et non de $\eta = \sqrt{\varepsilon}$. Il s'agit donc de montrer que la valeur à canard $c = c(\varepsilon)$ est holomorphe dans un voisinage de 0 et paire.

Considérons d'abord l'équation sur $[0, +\infty[$:

$$\varepsilon y' = \left(y - \frac{x^3}{3}\right) \left(y + x - \frac{x^3}{3}\right) + \varepsilon c. \quad (7.26)$$

Le changement de variables $y = \frac{x^3}{3} + z$ la ramène à une équation simple

$$\varepsilon z' = xz + z^2 + \varepsilon(c - x^2),$$

qu'on peut encore simplifier. Notons $d = d(\varepsilon)$ la solution de $d + d^2 = \varepsilon$ holomorphe dans un voisinage de $\varepsilon = 0$ et telle que $d(0) = 0$. Alors le changement de variables $z = d(\varepsilon)x + u$ mène à l'équation

$$\varepsilon u' = (1 + 2d(\varepsilon))xu + u^2 + \varepsilon(c - d(\varepsilon)).$$

L'homothétie $x = t/\gamma(\varepsilon)$, $u = \gamma(\varepsilon)v$ avec la fonction holomorphe $\gamma(\varepsilon)$ vérifiant $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(\varepsilon)^2 = 1 + 2d(\varepsilon)$ aboutit à l'équation

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = tv + v^2 + \varepsilon C(\varepsilon), \quad \text{où } C(\varepsilon) = (c - d(\varepsilon))/\gamma(\varepsilon)^2.$$

Pour cette équation, on peut éliminer le petit paramètre ε , sauf dans l'argument de C . En effet, le changement de variables $t = \sqrt{\varepsilon}T$, $v = \sqrt{\varepsilon}V$ mène à

$$\frac{dV}{dT} = TV + V^2 + D \quad (7.27)$$

avec $D = C(\varepsilon)$, qui est l'équation intérieure réduite hormis le fait que D n'est pas indépendant de ε ; c'est une fonction analytique $D = C(\varepsilon)$, avec $C(0) = c$. Pour D arbitraire dans \mathbb{C} , notons maintenant $V_d(T, D)$ la solution de (7.27) tendant vers 0 quand T tend vers $+\infty$. Elle peut être exprimée par des solutions de l'équation de Weber, mais cela n'apporte rien ici. Constatons simplement qu'elle est une fonction entière de D , méromorphe de T , qu'elle admet un développement asymptotique Gevrey d'ordre $\frac{1}{2}$ uniforme par rapport à D dans tout compact, de la forme $V_d(T, D) \sim \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} W_m(D) T^{-2m-1}$ avec $W_0(D) = -D$ et enfin que $V_d(T, 0) = 0$ et $\frac{\partial V_d}{\partial D}(0, 0) < 0$.

En résumé, si l'on tient compte de tous les changements de variables, pour $|c|$ petit, (7.26) admet une unique solution y_d telle que $y_d(x, c, \varepsilon) - \frac{x^3}{3} - d(\varepsilon)x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Il s'agit de la fonction

$$y_d(x, c, \varepsilon) = \frac{x^3}{3} + d(\varepsilon)x + \sqrt{\varepsilon} \gamma(\varepsilon) V_d\left(\gamma(\varepsilon) \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{c-d(\varepsilon)}{\gamma(\varepsilon)^2}\right).$$

Cette solution est holomorphe pour $\varepsilon \in S(-\alpha, \alpha, \varepsilon_1)$, $x \in V(-\beta, \beta, \infty, L\sqrt{\varepsilon})$ et $|c| < \rho$ avec $\alpha, \beta, \varepsilon_1, L, \rho > 0$ peut-être petits.

Sur $]-\infty, 0]$, l'équation du canard angulaire classique est

$$\varepsilon y' = \left(y + \frac{x^3}{3}\right) \left(y + x + \frac{x^3}{3}\right) + \varepsilon c. \quad (7.28)$$

De manière analogue, et en utilisant que (7.27) ne change pas sous la transformation $T \rightarrow -T$, $V \rightarrow -V$, on obtient que la fonction

$$y_g(x, c, \varepsilon) = -\frac{x^3}{3} + d(-\varepsilon)x - \sqrt{\varepsilon} \gamma(-\varepsilon) V_d\left(-\gamma(-\varepsilon) \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{c-d(-\varepsilon)}{\gamma(-\varepsilon)^2}\right)$$

est son unique solution telle que $y_g(x, c, \varepsilon) + \frac{x^3}{3} - d(-\varepsilon)x$ tende vers 0 quand x tend vers $-\infty$. Elle est holomorphe pour $\varepsilon \in S(-\alpha, \alpha, \varepsilon_1)$, $x \in V(\pi - \beta, \pi + \beta, \infty, L\sqrt{\varepsilon})$ et $|c| < \rho$ avec certains $\alpha, \beta, \varepsilon_1, L, \rho > 0$.

L'équation déterminant la valeur à canard non lisse $c = c(\varepsilon)$ est donc

$$\gamma(\varepsilon) V_d\left(0, \frac{c-d(\varepsilon)}{\gamma(\varepsilon)^2}\right) = -\gamma(-\varepsilon) V_d\left(0, \frac{c-d(-\varepsilon)}{\gamma(-\varepsilon)^2}\right). \quad (7.29)$$

À cette équation, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites pour les fonctions holomorphes. On obtient d'abord que $c = c(\varepsilon)$ est une fonction holomorphe de ε dans un voisinage de 0 et ensuite qu'elle est paire en vertu de la symétrie de l'équation (7.29). Ceci démontre l'énoncé. \square

REMARQUE. Non seulement la valeur à canard $c = c(\varepsilon)$, mais aussi les solutions canards y_g et y_d , ont des développements convergents en puissances de ε . Pour $x \geq 0$, la solution canard est donnée par

$$y(x, \varepsilon) = y_d(x, c(\varepsilon), \varepsilon) = \frac{x^3}{3} + d(\varepsilon)x + \sqrt{\varepsilon} \gamma(\varepsilon) V_d\left(\gamma(\varepsilon) \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{c(\varepsilon)-d(\varepsilon)}{\gamma(\varepsilon)^2}\right)$$

avec les fonctions y_d et V_d de la preuve. Or la fonction $(X, \varepsilon) \mapsto \gamma(\varepsilon) V_d(\gamma(\varepsilon) X, C(\varepsilon))$ avec $C(\varepsilon) = (c(\varepsilon) - d(\varepsilon))/\gamma(\varepsilon)^2$ est holomorphe bornée

dans $V(-\alpha, \alpha, \infty, L) \times D(0, \varepsilon_1)$, si $\alpha, L, \varepsilon_1 > 0$ sont assez petits. Comme $c(0) = d(0) = 0$, on en déduit que la série de Taylor

$$\gamma(\varepsilon) V_d(\gamma(\varepsilon) X, C(\varepsilon)) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(X) \varepsilon^n$$

converge uniformément sur $V(-\alpha, \alpha, \infty, L)$ et sur tout compact de $D(0, \varepsilon_1)$. Par conséquent, le DAC de y est une série convergente en $\eta = \sqrt{\varepsilon}$. Ce DAC est constitué d'une partie lente ne contenant que des puissances paires de η , avec pour terme principal $x^3/3$ et les autres termes des multiples scalaires de x , et d'une partie rapide ne contenant que des puissances impaires de η et dont les coefficients sont des fonctions $W_n(X)$ ayant des développements asymptotiques Gevrey d'ordre $\frac{1}{2}$ quand X tend vers $+\infty$. Comme pour la fonction V_d , ces derniers développements ne contiennent que des puissances impaires de X^{-1} . Les propriétés de la solution canard pour $x \leq 0$ sont analogues.

7.3 Résonance d'Ackerberg-O'Malley.

On considère l'équation linéaire d'ordre 2

$$\varepsilon z'' - f(x, \varepsilon) z' + g(x, \varepsilon) z = 0 \quad (7.30)$$

où f et g sont analytiques dans un voisinage complexe \mathcal{U} de $(0, 0)$. Dans [20], on avait étudié, entre autres, des *solutions \mathcal{C}^∞ -résonantes locales* de (7.30). Ce sont des solutions $z = z(x, \varepsilon)$ définies pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $-\delta \leq x \leq \delta$ avec certains $\varepsilon_0, \delta > 0$, qui tendent vers une solution non triviale de l'équation différentielle réduite

$$-f(x, 0) z' + g(x, 0) z = 0 \quad (7.31)$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$, uniformément sur $]-\delta, \delta[$, et telles que toutes les dérivées $z^{(m)}$ sont bornées sur $]-\delta, \delta[$ (uniformément quand ε tend vers 0). Nous étudierons aussi des *solutions résonantes locales*, i.e. des solutions qui tendent vers une solution non triviale de (7.31) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformément sur $]-\delta, \delta[$, mais dont les dérivées ne sont plus nécessairement bornées uniformément par rapport à ε . Dans cette partie, on fait l'hypothèse

$$f(x, 0) = \alpha x^{p-1} + \mathcal{O}(x^p) \quad \text{et} \quad g(x, 0) = \beta x^{p-2} + \mathcal{O}(x^{p-1}) \quad (7.32)$$

avec p entier naturel pair, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. Le résultat que nous présentons (théorème 7.5) donne des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur les solutions formelles de l'équation (7.30) et de l'équation intérieure associée, pour l'existence de solutions résonantes et \mathcal{C}^∞ -résonantes locales. Il convient donc d'introduire cette équation intérieure; on l'obtient avec le changement de variables $x = \eta X$, $Z(X) = z(\eta X)$ et $\varepsilon = \eta^p$

$$\frac{d^2 Z}{dX^2} - \tilde{f}(X, \eta) \frac{dZ}{dX} + \tilde{g}(X, \eta) Z = 0, \quad (7.33)$$

où $\tilde{f}(X, \eta) = \eta^{1-p} f(\eta X, \eta^p)$ et $\tilde{g}(X, \eta) = \eta^{2-p} g(\eta X, \eta^p)$. L'hypothèse (7.32) entraîne que

$$\tilde{f}(X, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(X) \eta^n, \quad \tilde{g}(X, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(X) \eta^n,$$

séries convergentes pour X dans un compact de \mathbb{R} et pour $|\eta|$ assez petit, où p_n, q_n sont des polynômes, dont les premiers sont $p_0(X) = \alpha X^{p-1}$ et $q_0(X) = \beta X^{p-2}$. Avant d'énoncer le résultat, nous décrivons les solutions formelles, dites *extérieures*, resp. *intérieures*, de (7.30) et (7.33). Les solutions formelles extérieures de (7.30) sont de la forme $\hat{z}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x) \varepsilon^n$; leurs coefficients satisfont la récurrence

$$f(x, 0)z'_n - g(x, 0)z_n = h_n(x),$$

où $h_0 \equiv 0$ et où $h_n(x)$ est le coefficients de ε^n dans le développement de Taylor de

$$\varepsilon \hat{z}''(x, \varepsilon) - (f(x, \varepsilon) - f(x, 0))\hat{z}'(x, \varepsilon) + (g(x, \varepsilon) - g(x, 0))\hat{z}(x, \varepsilon).$$

Les fonctions h_n dépendent de f, g , de z_0, \dots, z_{n-1} et de leurs dérivées. On voit facilement que ces solutions formelles sont uniques à un facteur constant⁵ près. Précisément, si $\hat{z}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x) \varepsilon^n$ est une solution formelle non triviale de (7.30), alors les solutions formelles de (7.30) sont les séries formelles de la forme $\hat{c}(\varepsilon) \hat{z}_0$ où $\hat{c}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n$. Par ailleurs, les coefficients z_n peuvent avoir des singularités en $x = 0$, mais sont prolongeables le long de tout chemin restant dans le voisinage \mathcal{U} et évitant 0.

Les solutions formelles intérieures de (7.33) sont de la forme $\hat{Z}(X, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(X) \eta^n$; leurs coefficients satisfont la récurrence

$$\frac{d^2 U_n}{dX^2} - \alpha X^{p-1} \frac{dU_n}{dX} + \beta X^{p-2} U_n = H_n(X), \quad (7.34)$$

où $H_0 \equiv 0$ et $H_n(x)$ est le coefficient de η^n dans le développement de Taylor de

$$(\tilde{f}(X, \eta) - \alpha X^{p-1}) \frac{d\hat{Z}}{dX}(X, \eta) - (\tilde{g}(X, \eta) - \beta X^{p-2}) \hat{Z}(X, \eta).$$

Les fonctions H_n dépendent de \tilde{f}, \tilde{g} , de U_0, \dots, U_{n-1} et de leurs dérivées. Ces solutions formelles intérieures ne sont pas uniques, même à un facteur $\hat{c}(\eta)$ constant près, mais dépendent de deux paramètres $\hat{c}_1(\eta)$ et $\hat{c}_2(\eta)$. Par contre, les fonctions U_n sont entières car les coefficients de \tilde{f}, \tilde{g} sont des polynômes et la récurrence est linéaire. Si on demande de plus que les coefficients U_i soient des fonctions à croissance polynomiale quand X tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on obtient des solutions formelles intérieures notées

$\hat{Z}^{\pm}(X, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{\pm}(X) \eta^n$ qui sont uniques à un facteur constant près et qui joueront un rôle important dans la suite.

Signalons que les deux types de solutions formelles peuvent contenir des termes logarithmiques : les solutions formelles extérieures en la singularité $x = 0$, les solutions intérieures dans le comportement asymptotique de leurs coefficients quand $X \rightarrow \pm\infty$. Ceci sera source de complications dans la preuve. À présent nous sommes en mesure d'énoncer le résultat.

Théorème 7.5 .

(a) *Sous l'hypothèse (7.32), l'équation différentielle (7.30) admet des solutions résonantes locales si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

- *le quotient $D = \beta/\alpha$ est un entier positif ou nul congru à 0 ou 1 modulo p et*
- *il existe une solution formelle non triviale $\hat{Z}(X, \varepsilon) = Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(X) \eta^n$ de (7.33) dont les coefficients sont à croissance polynomiale à la fois quand $X \rightarrow +\infty$ et quand $X \rightarrow -\infty$.*

(b) *Sous l'hypothèse (7.32), l'équation (7.30) admet des solutions \mathcal{C}^{∞} -résonantes locales si et seulement si :*

- *D est un entier positif ou nul congru à 0 ou 1 modulo p et*
- *il existe une solution formelle non triviale $\hat{z}(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x) \varepsilon^n$ de (7.30) dont les coefficients sont analytiques au voisinage de 0.*

Ceci est le cas si et seulement si $\eta^{-D} \hat{z}(\eta X, \eta^p) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(X) \eta^n$, où Z_n sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $n + D$.

Dans les deux parties de l'énoncé, Z_0 est un polynôme de degré D exactement ; c'est le même si on le choisit unitaire.

REMARQUES. 1. Pour le lien avec le problème original de la résonance de [1] et avec la surstabilité, on pourra consulter [20].

2. Dans [20], nous avons conjecturé la partie (b) et nous l'avions démontrée dans deux cas : d'une part dans le cas $p = 2$ et d'autre part dans le cas $p > 2$ et $\beta = 0$, i.e. $g(x, 0) = \mathcal{O}(x^{p-1})$. Dans [10], Peter De Maesschalck présente des résultats analogues. Nous les décrivons après le théorème 7.8.

3. Dans le cas $\beta = 0$, l'équation (7.30) réduite $f(x, 0)z' = g(x, 0)z$ n'a pas de point singulier en $x = 0$ et donc $Z_0 \equiv 1$. Par conséquent, le passage à l'équation de Riccati du début de la preuve ci-dessous n'introduit pas de pôle si $\beta = 0$. Par contre, si $\beta \neq 0$, les solutions y^{\pm} de cette équation de Riccati peuvent avoir des pôles dans $[-L\eta, L\eta]$ (où L est introduit au début de la preuve), ce qui explique pourquoi nous revenons aux solutions de l'équation linéaire d'ordre deux correspondante.

5. Ici et dans la suite, le mot "constant" signifie constant par rapport à x .

4. Quand on fixe α, β tels que $D = \beta/\alpha$ est un entier positif congru à 0 ou 1 mod p , alors la condition du théorème 7.5 (a) est une suite de conditions polynomiales dans les coefficients a_{nm} et b_{nm} des séries

$$f(x, \varepsilon) = \alpha x^{p-1} + \sum_{m \geq p} a_{0m} x^m + \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} a_{nm} x^m \varepsilon^n$$

respectivement

$$g(x, \varepsilon) = \beta x^{p-2} + \sum_{m \geq p-1} b_{0m} x^m + \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} b_{nm} x^m \varepsilon^n.$$

Ceci est démontré de manière analogue à la remarque 5 après le théorème 7.1.

Preuve. La première étape, suivant une idée de Jean-Louis Callot, est de passer à l'équation de Riccati correspondante. Ceci se fait en posant $y = \varepsilon z'/z$ et aboutit à

$$\varepsilon y' = f(x, \varepsilon)y - \varepsilon g(x, \varepsilon) - y^2. \quad (7.35)$$

D'après notre hypothèse, le corollaire 6.16 peut être appliqué avec $r = p - 1$. En tenant compte de la remarque qui suit ce corollaire, on obtient qu'il existe $\eta_0, x_0, L > 0$ tels que (7.35) admet deux solutions $y^\pm(x, \eta)$, définies pour $\eta = \varepsilon^{1/p} \in]0, \varepsilon_0^{1/p}]$ et $\pm x \in [L\eta, x_0]$, et que ces solutions admettent des DAC Gevrey

$$y^\pm(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} g_{p-1}^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^{p-1} + \sum_{n=p}^{\infty} \left(a_n(x) + g_n^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right)\right) \eta^n \quad (7.36)$$

quand η tend vers 0, uniformément sur $\pm[L\eta, x_0]$. Ici et dans la suite, nous combinons deux énoncés pour x positifs resp. x négatifs en utilisant le symbole \pm ; les fonctions a_n sont réelles analytiques sur $[-x_0, x_0]$ et les fonctions g_n^\pm sont réelles analytiques sur $\pm[L, +\infty[$. La définition de DAC Gevrey est l'usuelle définition 4.3, en remplaçant les secteurs et quasi-secteurs par des intervalles. Remarquons que, d'après (7.35), les dérivées de y^\pm admettent aussi des DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$, à cause de la compatibilité des DAC Gevrey avec les opérations élémentaires; ces DAC des dérivées sont donc obtenus en dérivant terme à terme d'après la remarque après le lemme 3.6. Par ailleurs, d'après la remarque 3 qui suit la proposition 3.10, les fonctions a_n dans (7.36) sont les mêmes pour y^+ et pour y^- .

En injectant ces DAC dans (7.35), on obtient que g_{p-1}^\pm est l'unique solution de l'équation de Riccati réduite

$$\frac{dY}{dX} = \alpha X^{p-1}Y - \beta X^{p-2} - Y^2 \quad (7.37)$$

qui tend vers 0 quand X tend vers $\pm\infty$. On a donc $g_{p-1}^\pm(X) = \frac{D}{X} + \mathcal{O}(X^{-2})$, $X \rightarrow \pm\infty$ (avec $D = \beta/\alpha$). Nous utiliserons aussi que $g_{p-1}^\pm(X) = Z_0^{\pm'}(X)/Z_0^\pm(X)$ où Z_0^\pm est l'unique solution de l'équation linéaire réduite associée à (7.33)

$$\frac{d^2 Z}{dX^2} - \alpha X^{p-1} \frac{dZ}{dX} + \beta X^{p-2} Z = 0 \quad (7.38)$$

telle que $Z_0^\pm(X) \sim_{\frac{1}{p}} (\pm X)^D \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} d_m X^{-mp}\right)$ quand X tend vers $\pm\infty$. Ceci facilitera le passage du DAC (7.36) à l'équation linéaire.

Ce passage se fait par $z = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int y\right)$ et nécessite donc l'intégration d'un DAC. En utilisant les développements $g_n^\pm(X) \sim \sum_{m=1}^{\infty} g_{nm} X^{-m}$ et le fait que g_{nm} est nul lorsque $n + m \not\equiv 0 \pmod{p}$, on obtient d'après la proposition 3.8

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\pm r}^x y^\pm(\xi, \eta) d\xi \sim \hat{Y}^\pm(x, \eta) - \hat{Y}^\pm(\pm r, \eta)$$

avec

$$\hat{Y}^\pm(x, \eta) = \log\left(\eta^D Z_0^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right)\right) + A_0(x) + \hat{R}(\varepsilon) \log(x^p + \varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n(x) + G_n^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right)\right) \eta^n$$

$$\text{où } A_n(x) = \int_0^x a_{n+p}(\xi) d\xi, \hat{R}(\varepsilon) = \frac{1}{p} \sum_{l=2}^{\infty} g_{lp-1,1} \varepsilon^{l-1} \text{ et}$$

$$G_n^\pm(X) = \int_{\pm\infty}^X (g_{n+p-1}^\pm(T) - g_{n+p-1,1} T^{p-1} (T^p + 1)^{-1}) dT.$$

Comme nous l'avons fait dans la preuve de la proposition 3.8, on identifie ici $\hat{Y}^\pm(\pm r, \eta)$ avec la série formelle en puissances de η obtenue en développant $\log(r^p + \varepsilon)$ par la formule de Taylor et en utilisant les développements asymptotiques à l'infini de $\log(\eta^D Z_0^\pm(\frac{x}{\eta}))$ et de $G_n^\pm(\frac{x}{\eta})$.

En utilisant la compatibilité des DAC avec la composition (ici avec l'exponentielle) et en multipliant par une fonction de η seulement ayant l'asymptotique $\eta^{-D} \exp(\hat{Y}^\pm(\pm r, \eta))$, on en déduit l'existence de deux solutions ayant une forme de DAC généralisé (7.39) ci-dessous. Nous décrivons ces solutions dans un énoncé séparé car il peut être utile pour l'étude d'équations linéaires du deuxième ordre, indépendamment du problème de la résonance.

Proposition 7.6 . *Sous l'hypothèse (7.32), il existe $x_0, L > 0$, une série formelle $\hat{R} = \hat{R}(\varepsilon)$ Gevrey d'ordre 1 sans terme constant, des fonctions B_n réelles analytiques sur $[-x_0, x_0]$ avec $B_0(0) = 1$ et H_n^\pm réelles analytiques sur $\pm[L, \infty[$ et deux solutions z^\pm de l'équation (7.30), telles que*

$$z^\pm(x, \eta) \sim_{\frac{1}{p}} Z_0^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right) e^{\hat{R}(\varepsilon) \log(x^p + \varepsilon)} \left(B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n(x) + H_n^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right)\right) \eta^n\right) \quad (7.39)$$

quand $\eta \rightarrow 0$, uniformément sur $[L\eta, x_0]$, resp. $[-x_0, -L\eta]$, où $Z_0^\pm(X)$ sont les uniques solutions de (7.38) avec $Z_0^\pm(X) \sim (\pm X)^D (1 + \mathcal{O}(X^{-1}))$ quand $X \rightarrow \pm\infty$.

Précisément, la relation (7.39) signifie que, pour toute fonction $R :]0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ ayant $\widehat{R}(\varepsilon)$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre 1 (par rapport à ε), la fonction

$$e^{-R(\varepsilon) \log(x^p + \varepsilon)} z^\pm(x, \eta) / Z_0^\pm(\frac{x}{\eta}) \sim_{\frac{1}{p}} B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n(x) + H_n^\pm(\frac{x}{\eta}) \right) \eta^n$$

admet un DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$.

REMARQUES. 1. En termes des fonctions A_n et G_n^\pm précédentes, les fonctions B_n et H_n^\pm sont définies par $B_0(x) = \exp(A_0(x))$ et par

$$\begin{aligned} B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n(x) + H_n^\pm(\frac{x}{\eta}) \right) \eta^n \\ = B_0(x) \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n(x) + G_n^\pm(\frac{x}{\eta}) \right) \eta^n \right). \end{aligned} \quad (7.40)$$

2. L'unicité des DAC à gauche et à droite pour l'équation de Riccati implique que les développements (7.39) à gauche et à droite de solutions de (7.30) sont uniques à une constante multiplicative $\widehat{c}(\eta)$ près.

3. De même que pour les fonctions a_n dans (7.36) concernant y^\pm et les fonctions A_n pour \widehat{Y}^\pm ainsi que l'asymptotique des fonctions H_n^\pm quand $X \rightarrow \pm\infty$, les fonctions $B_n(x)$ sont les mêmes pour z^+ et z^- .

4. Pour x fixé, $\eta^D Z_0^\pm(\frac{x}{\eta})$ et les deux autres facteurs des développements (7.39) de z^\pm admettent un développement asymptotique en puissances de $\eta^p = \varepsilon$ quand $\eta \rightarrow 0$. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi $\ell(x, \eta) = \log(x^p + \eta^p)$ en appliquant la proposition 3.8.

5. Si $\operatorname{Re}(D) > 0$, alors $\eta^D z^\pm(x, \eta)$ tend vers $x^D B_0(x)$ uniformément sur $\pm[L\eta, x_0]$ quand $\eta \rightarrow 0$. En effet, comme produit de deux fonctions admettant des DAC, $e^{-R(\varepsilon) \log(x^p + \varepsilon)} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{-D} z^\pm(x, \eta)$ admet pour DAC Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ la série formelle obtenue en développant

$$\left(\frac{x}{\eta}\right)^{-D} Z_0^\pm(\frac{x}{\eta}) \left(B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n(x) + H_n^\pm(\frac{x}{\eta}) \right) \eta^n \right) = B_0(x) + G_0^\pm(\frac{x}{\eta}) + \mathcal{O}(\eta)$$

avec une certaine fonction $G_0^\pm(X)$ ayant un développement asymptotique sans terme constant quand $X \rightarrow \pm\infty$. En multipliant avec x^D et en utilisant $x^D G_0^\pm(\frac{x}{\eta}) = \mathcal{O}(\eta^{\min(1, \operatorname{Re} D)})$, on obtient le résultat voulu.

6. Une comparaison avec les développements présentés dans la suite montre que les produits $Z_0^\pm(X) H_n^\pm(X)$ sont analytiques dans un voisinage de l'axe réel; puisque Z_0^\pm peut avoir des zéros, cela n'empêche pas que les H_n^\pm

puissent avoir des singularités, même sur l'axe réel, mais ces singularités sont nécessairement des pôles. En revanche, ces produits $Z_0^\pm(X) H_n^\pm(X)$ peuvent avoir d'autres singularités en dehors de l'axe réel. Ceci provient du fait qu'on a mis en facteur une série contenant $\log(X^p + 1)$ qui a des points de ramification en les zéros de $X^p + 1$.

7. Comme avant, on peut aussi dériver ces développements terme à terme.

Suite de la preuve du théorème 7.5. Sur des intervalles de la forme $\pm[L, M]$ avec un certain $M > 0$, on a donc $Z^\pm(X, \eta) := z^\pm(\eta X, \eta) = Z_0^\pm(X) + \mathcal{O}(\eta)$. Or Z_0^\pm est solution de (7.33) qui est régulièrement perturbée et se réduit à (7.38) quand $\eta = 0$. Le prolongement de z^\pm sur $[-M\eta, M\eta]$ satisfait donc $z^\pm(x, \eta) = Z_0^\pm(\frac{x}{\eta}) + \mathcal{O}(\eta)$ d'après le théorème de dépendance analytique d'équations différentielles par rapport aux paramètres. L'existence d'une solution résonante locale de (7.30) nécessite donc d'abord que Z_0^+ soit proportionnelle à Z_0^- . Nous montrerons plus bas le lemme qui suit.

Lemme 7.7 . *La fonction Z_0^+ est proportionnelle à Z_0^- si et seulement si $D = \beta/\alpha$ est un entier positif congru à 0 ou 1 modulo p . De plus, dans ce cas, $Z_0 := (\pm 1)^D Z_0^\pm$ est un polynôme de degré D .*

La condition sur D est supposée désormais. Alors, en utilisant la proposition 4.4, la relation (7.39) entraîne les développements intérieurs suivants pour $\pm X \in [L, M]$

$$\begin{aligned} z^\pm(\eta X, \eta) e^{-\widehat{R}(\varepsilon) \log \varepsilon} \sim_{\frac{1}{p}} e^{\widehat{R}(\varepsilon) \log(X^p + 1)} \left(Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} (Z_n(X) + K_n^\pm(X)) \eta^n \right) \end{aligned} \quad (7.41)$$

avec des polynômes Z_n de degré au plus $n + D$ et des fonctions $K_n^\pm \in \mathcal{G}_L^\pm$, où \mathcal{G}_L^\pm est l'ensemble des fonctions réelles analytiques sur $[L, +\infty[$ ayant un développement asymptotique sans terme constant quand X tend vers $+\infty$.

Précisément, notons P_n la partie polynomiale du produit $Z_0 H_n^\pm$; son degré est au plus $D - 1$ puisque $H_n^\pm(X) = \mathcal{O}(X^{-1})$ lorsque $X \rightarrow \pm\infty$. On a alors $K_n^\pm = Z_0 H_n^\pm - P_n$. Le polynôme Z_n , quant à lui, est obtenu en développant les fonctions $X \mapsto B_k(\eta X) \eta^k$, $k \leq n$ par la formule de Taylor et en ne retenant que les termes en η^n , puis en multipliant par Z_0 , et enfin en ajoutant P_n . En d'autres termes

$$Z_n(X) = P_n(X) + Z_0(X) \sum_{k=0}^n \frac{B_{n-k}^{(0)}(0)}{k!} X^k.$$

En développant l'exponentielle du côté droit de (7.41), on obtient donc des fonctions $U_n^\pm \in \mathcal{G}_L^\pm[X, \log(X^p + 1)]$ (i.e. polynomiales en X et $\log(X^p + 1)$), avec des coefficients dans \mathcal{G}_L^\pm telles que

$$z^\pm(\eta X, \eta) e^{-\widehat{R}(\varepsilon) \log \varepsilon} \sim_{\frac{1}{p}} Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^\pm(X) \eta^n \quad (7.42)$$

quand $\eta \rightarrow 0$ uniformément pour $\pm X \in [L, M]$. Or la série formelle dans (7.42) est solution formelle de (7.33), donc ses coefficients peuvent être prolongés en des fonction entières. Par construction, la croissance de $U^\pm(X)$ quand X tend vers ∞ est polynomiale. Puisque (7.33) est régulièrement perturbée (et linéaire), on peut appliquer le théorème de dépendance analytique et la proposition 4.5. On obtient que (7.42) reste valable pour $X \in [-M, M]$, ainsi que (7.41). Comme auparavant, on peut dériver (7.41) et (7.42) terme à terme par rapport à X .

Supposons d'abord que (7.30) admette une solution résonante locale, notée $z(x, \eta)$, définie et bornée quand $-\delta \leq x \leq \delta$ et $0 < \eta \leq \eta_0$. Alors, quitte à diminuer δ , la fonction $y : (x, \eta) \mapsto \varepsilon z'(x, \eta)/z(x, \eta)$ est une solution de (7.35) de conditions initiales en $\pm\delta$ bornées. Elle admet donc des DAC (7.36) quand $0 < \eta \leq \eta_0$ et $\pm x \in [L\eta, \delta]$ avec un certain $L > 0$ et des η_0, δ diminués. À un facteur constant près, les fonctions $\exp\{\frac{1}{\varepsilon} \int_{\pm\delta}^x y(\xi) d\xi\}$ admettent donc les DAC généralisés (7.39) et aussi les développements intérieurs (7.42). Par construction, ces fonctions sont proportionnelles à la solution z donnée, donc chacune d'elle est proportionnelle à l'autre. Le quotient des deux solutions doit donc avoir un développement asymptotique en série de puissances de η , que nous notons $\hat{c}(\eta)$. Par conséquent la série formelle $Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^+(X)\eta^n$ doit être égale à $((-1)^D Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^-(X)\eta^n)\hat{c}(\eta)$. Ceci implique que les coefficients des deux séries ont une croissance polynomiale dans les deux directions $+\infty$ et $-\infty$, ce qui montre la nécessité pour la première partie du théorème.

Pour montrer qu'il s'agit d'une condition suffisante, on utilise l'existence des deux solutions satisfaisant (7.39) et donc aussi (7.41) et (7.42) pour $X \in [-M, M]$. L'existence d'une solution formelle de (7.33) dont les coefficients sont à croissance polynomiale quand X tend vers $+\infty$ et $-\infty$ entraîne que la série formelle $Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^+(X)\eta^n$ doit être proportionnelle à $Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^D U_n^-(X)\eta^n$. Or les coefficients lents $B_n(x)$ sont les mêmes dans (7.39), donc le quotient doit être égal à 1. À ce point, on utilise que nos DAC sont Gevrey ; en particulier (7.42). De plus, ce sont les mêmes développements pour z^+ et z^- et en particulier ces deux fonctions et leurs dérivées ont le même développement asymptotique Gevrey en $x = 0$. Les différences $z^+(0, \eta) - z^-(0, \eta)$ et $z^{+'}(0, \eta) - z^{-'}(0, \eta)$ sont donc exponentiellement petites (d'ordre p en η , i.e. d'ordre 1 en ε). De manière analogue à la preuve du théorème 7.1, on en déduit par le lemme de Gronwall que z^+ et z^- sont exponentiellement proches sur un intervalle $[-\delta, \delta]$ avec $\delta > 0$ indépendant de η . Les prolongements des solutions $\eta^D z^\pm(x, \eta)$, sur un intervalle indépendant de η contenant 0 dans son intérieur, tendent donc vers $x^D B_0(x)$ uniformément en η d'après la remarque 5. Ce sont donc des solutions résonantes locales.

Supposons maintenant que (7.30) admette une solution \mathcal{C}^∞ -résonante locale. Alors les fonctions z^+ et z^- doivent avoir des dérivées bornées (uniformément par rapport à ε) dans un voisinage de 0 indépendant de ε . Les fonctions $Z^\pm : (X, \eta) \mapsto z^\pm(\eta X, \eta)$ doivent donc satisfaire $Z^{\pm(m)}(X, \eta) = \mathcal{O}(\eta^m)$ uniformément sur $\pm[L, M]$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Si l'un des coefficients de \hat{R} ou l'une des fonctions K_n^\pm était non nul, et donc si l'un des U_n^\pm n'était pas un polynôme en X , alors en dérivant (7.42) terme à terme, on obtiendrait que $Z^{\pm(m)}(X, \eta)$ ne pourrait pas être $\mathcal{O}(\eta^m)$ pour m grand. On doit donc avoir $\hat{R}(\varepsilon) = 0$ et $K_n^\pm = 0$ pour tout n . Avec cette information,

(7.39) entraîne un développement pour z^\pm de la forme

$$\eta^D z^\pm(x, \eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \eta^n := \eta^D Z_0\left(\frac{x}{\eta}\right) \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta^D P_n\left(\frac{x}{\eta}\right) \eta^n ; \quad (7.43)$$

ici $\eta^D Z_0(\frac{x}{\eta})$ et les $\eta^D P_n(\frac{x}{\eta})$ sont des polynômes en x et η et $C_0(x) = x^D B_0(x) \neq 0$.

Dans le cas où il existe une solution locale \mathcal{C}^∞ -résonante, on a $\eta^D z^\pm(x, \eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \eta^n$ et, en particulier, le côté droit est une solution formelle non triviale de (7.30) avec des coefficients analytiques en $x = 0$. Quitte à multiplier cette solution par une série $\hat{c}(\eta)$, on peut imposer par exemple $C_0(0) = 1, C_1(0) = \dots = C_{p-1}(0) = 0$, et on vérifie alors que $C_n = 0$ si $n \not\equiv 0 \pmod{p}$; c'est donc une solution formelle en puissances de $\varepsilon = \eta^p$.

Pour voir qu'il s'agit d'une condition suffisante ici aussi, on utilise à nouveau l'existence des deux solutions satisfaisant (7.39). L'existence d'une solution formelle non triviale de (7.30) sans singularité en $x = 0$ implique en remplaçant $x = \eta X$, que (7.33) admet une solution formelle à coefficients polynomiaux en X . Puisque les solutions formelles de (7.33) $Z_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^\pm(X)\eta^n$, avec $U_n^\pm(X)$ à croissance polynomiale quand X tend vers l'infini, sont uniques à un facteur constant près, les fonctions U_n^\pm sont des polynômes. Une comparaison avec (7.41) montre que $\hat{R}(\varepsilon) = 0$ et que $K_n^\pm \equiv 0$ pour tout n . En utilisant leur définition (en dessous de (7.41)), on obtient donc que les fonctions z^\pm satisfont (7.43). Ce développement asymptotique peut être considéré comme un DAC sans partie rapide, et ceci pour $X \in [L\eta, r]$ resp. $X \in [-r, -L\eta]$ avec un certain $L > 0$. On peut étendre la validité à $\pm[0, r]$ comme précédemment en utilisant le fait que $X \mapsto z^\pm(X\eta, \eta)$ satisfait une équation régulièrement perturbée sur $\pm[0, L]$. Enfin, on utilise de nouveau que (7.39) et donc (7.43) sont Gevrey. Puisque c'est le même développement pour z^+ et z^- , on en déduit comme précédemment par Gronwall que les fonctions z^\pm sont des solutions résonantes locales. En dérivant terme à terme le DAC (7.43), on peut faire le même raisonnement pour toutes leurs dérivées ; il s'agit donc de solutions \mathcal{C}^∞ -résonantes locales. \square

REMARQUE. Une preuve de la suffisance pour la deuxième partie comme dans [8] est possible (voir aussi [20]). On montre d'abord le caractère Gevrey de la solution formelle \hat{z} (à un facteur $\hat{c}(\varepsilon)$ près) ; ensuite on construit une quasolution de (7.30) et enfin on montre que la solution avec la même condition initiale en 0 est une solution \mathcal{C}^∞ -résonante locale.

Nous terminons avec la preuve du lemme 7.7. Supposons que $Z_0^+ = c Z_0^-$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. Comme p est pair, le changement de variable $X \mapsto -X$ laisse l'équation (7.38) inchangée. D'après leur définition par l'asymptotique, on a donc $Z_0^+(-X) = Z_0^-(X)$. Par conséquent on a aussi $Z_0^- = c Z_0^+$, donc $c = \pm 1$. Dans le cas $c = 1$, la fonction $Z_0 := Z_0^- = Z_0^+$ est paire, donc $Z_0'(0) = 0$. Dans le cas $c = -1$, la fonction $Z_0 := Z_0^- = -Z_0^+$ est impaire, donc $Z_0(0) = 0$. D'après la théorie générale des points singuliers irréguliers des équations linéaires d'ordre 2, on a $Z_0(X) = X^D(1 + \mathcal{O}(X^{-1}))$ dans le secteur $|\arg(X)| < \frac{3\pi}{2p}$ (correspondant à une montagne et aux deux vallées adjacentes).

L'équation (7.38) admet d'autres symétries. Posons $\rho = \exp(2\pi i/p)$; le changement de variable $X \mapsto \rho X$ laisse (7.38) inchangée. La fonction \tilde{Z}_0 définie par $\tilde{Z}_0(X) = Z_0(\rho X)$ satisfait donc (7.38) et $\tilde{Z}_0(X) = \exp(2D\pi i/p)X^D(1 + \mathcal{O}(X^{-1}))$ quand $|\arg X + \frac{2\pi}{p}| < \frac{3\pi}{2p}$.

Dans le cas $c = 1$, les valeurs initiales en $X = 0$ impliquent que $\tilde{Z}_0 = Z_0$ et donc l'unicité du comportement asymptotique dans l'intersection $\{X \mid \arg X \in [-\frac{3\pi}{2p}, -\frac{\pi}{2p}]\}$ des deux secteurs mentionnés ci-dessus implique que $\exp(2D\pi i/p) = 1$ et donc D doit être entier et multiple de p . En utilisant $Z_0(\rho^k X) = Z_0(X)$, $k = 0, 1, \dots, p-1$, on obtient $Z_0(X) = X^D(1 + \mathcal{O}(X^{-1}))$ quand $|X| \rightarrow +\infty$ quelque soit $\arg X$. Ceci implique que D est positif et que $Z_0(X)$ est un polynôme de degré D .

Dans le cas $c = -1$, on obtient $\tilde{Z}_0 = \rho Z_0$ et donc $\exp(2D\pi i/p) = \rho = \exp(2\pi i/p)$. Ceci implique que $D-1$ est un multiple de p ; comme avant on déduit que D est positif et que $Z_0(X)$ est un polynôme de degré D . Ceci démontre la nécessité de la condition du lemme. On démontre facilement que (7.38) admet une solution polynomiale dans les deux cas, qui est forcément proportionnelle à Z_0^\pm ; ainsi la condition est suffisante. \square

Les résultats précédents sont de nature locale. Comme dans la partie 7.1, les conditions du théorème 7.5 donnent aussi des résultats globaux.

Théorème 7.8 . Soit $a < 0 < b$ et f, g analytiques dans un voisinage complexe \mathcal{U} de $[a, b]$. On fait l'hypothèse (7.32) et on suppose de plus que $f(x, 0)$ est réel sur l'axe réel et $xf(x, 0) > 0$ quand $x \in [a, b] \setminus \{0\}$.

Alors les conditions du théorème 7.5 (a) sont équivalentes à l'existence d'une solution résonante globale de (7.30), i.e. une solution qui tend vers une solution non triviale de l'équation réduite (7.31) uniformément sur $[a, b]$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

De même, les conditions du théorème 7.5 (b) sont équivalentes à l'existence d'une solution \mathcal{C}^∞ -résonante globale de (7.30), i.e. une solution qui tend vers une solution non triviale de l'équation réduite (7.31) uniformément sur $[a, b]$ et dont toutes les dérivées sont bornées uniformément sur $[a, b]$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

REMARQUE. Dans [10], Peter De Maesschalck démontre que la condition du théorème 7.5 (b) est suffisante pour l'existence d'une solution \mathcal{C}^∞ -résonante globale, c.f. théorème 2. Il démontre aussi, c.f. théorème 5 du même article, que l'existence d'une solution résonante locale entraîne celle d'une solution résonante globale. Par contre, la nécessité de la condition dans 7.5 (b) et la nécessité et suffisance de la condition dans 7.5 (a) pour l'existence d'une solution résonante locale ou globale sont nouvelles.

Preuve. La nécessité des conditions du théorème 7.5 (a) pour l'existence d'une solution résonante globale est évidente, car elles sont déjà nécessaires pour l'existence d'une solution résonante locale.

La preuve de la suffisance est analogue à celle de l'implication (c) \Rightarrow (b) du théorème 7.1. Quitte à faire un changement de variable $x = h(t)$ tel que $F_0(h(t)) = t^p$ pour $F_0(x) = \int_0^x f(t, 0) dt$, on peut supposer que $f(x, 0) = px^{p-1}$. L'hypothèse

sur f assure qu'on peut faire ce changement de variable globalement sur un certain voisinage de $[a, b]$. Quitte à faire un changement de variable $z = e^{G(x, \varepsilon)} \tilde{z}$ avec $G'(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}(f(x, \varepsilon) - px^{p-1})$, on peut supposer que $f(x, \varepsilon) = px^{p-1}$. Sans perte en généralité, nous pouvons supposer l'existence de $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{U}$ avec $\tilde{a} < a < b < \tilde{b}$ et supposer $\tilde{a}^p < \tilde{b}^p$.

Il convient d'introduire le *wronskien* de deux solutions z_1, z_2 de (7.30). On pose

$$[z_1, z_2](\varepsilon) = e^{-x^p/\varepsilon}(z_1 z_2' - z_1' z_2)(x, \varepsilon).$$

D'après le théorème de Liouville, il s'agit d'une fonction de ε seulement. Le wronskien est une fonction bilinéaire et antisymétrique. On vérifie, pour plusieurs solutions z_i de (7.30), les formules

$$[z_1, z_2]z_3 + [z_2, z_3]z_1 + [z_3, z_1]z_2 = 0, \quad (7.44)$$

$$[z_1, z_2][z_3, z_4] - [z_1, z_3][z_2, z_4] + [z_1, z_4][z_2, z_3] = 0. \quad (7.45)$$

Supposons maintenant les hypothèses du théorème satisfaites et considérons les solutions z_a, z_b de (7.30) déterminées par

$$z_a(\tilde{a}, \varepsilon) = 1, z_a'(\tilde{a}, \varepsilon) = 0, \quad z_b(\tilde{b}, \varepsilon) = 1, z_b'(\tilde{b}, \varepsilon) = 0.$$

Il est connu que ces solutions ont des développements asymptotiques extérieurs sur $[\tilde{a} + d, -d]$, respectivement $[d, \tilde{b} - d]$, où $d > 0$ est arbitrairement petit et qu'elles sont prolongeables sur tout \mathcal{U} , mais les développements des prolongements peuvent être différents ou ne pas exister.

Nous allons montrer que $[z_a, z_b](\varepsilon)$ est exponentiellement petite; précisément nous montrerons qu'il existe $C > a^p$ telle que

$$[z_a, z_b](\varepsilon) = \mathcal{O}(e^{-C/\varepsilon}) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.46)$$

Ensuite, nous montrerons que cette propriété implique que z_b est une solution résonante globale.

Pour cela, nous introduisons d'autres solutions et nous procédons de manière analogue à la preuve de (7.3). D'abord on utilise l'existence de $\mu \in \mathbb{R}$, et pour tout $\gamma > 0$ d'un entier $L > \frac{\pi}{4p\gamma}$ et de $\eta_0, \rho > 0$ assez petits, tels qu'il existe des solutions $z_\ell^\pm(x, \eta)$, $\ell = -L, \dots, L$ de (7.30) holomorphes quand $\eta \in S_\ell = S(\ell \frac{\pi}{2pL} - \gamma, \ell \frac{\pi}{2pL} + \gamma, \eta_0)$ et $x \in V_\ell^\pm = \pm V(-\frac{3\pi}{2p} + \ell \frac{\pi}{2pL} + 2\gamma, \frac{3\pi}{2p} + \ell \frac{\pi}{2pL} - 2\gamma, \rho, \mu |\eta|)$ ayant des DAC généralisés

$$z_\ell^\pm(x, \eta) \sim \frac{1}{p} Z_0^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right) e^{\hat{R}(\varepsilon) \log(x^p + \varepsilon)} \left(B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n(x) + H_n^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \right) \quad (7.47)$$

avec les fonctions Z_0^\pm , B_n et H_n^\pm de la proposition 7.6; les B_n sont holomorphes bornées dans $D(0, \rho)$, les H_n^\pm dans $\pm V(-\frac{3\pi}{2p} + 2\gamma, \frac{3\pi}{2p} - 2\gamma, \infty, \mu)$ et admettent des développements asymptotiques sans termes constants quand $X \rightarrow \pm\infty$. Ceci est démontré de manière analogue à la proposition 7.6 en passant par l'équation de Riccati (7.35) et en utilisant les rotations $\eta = e^{i\psi} \tilde{\eta}$, $x = \pm e^{i\psi} \tilde{x}$ avec $\psi = \ell \frac{\pi}{2pL}$; le fait que les fonctions a_n et g_n^\pm soient indépendantes de ℓ est dû à l'unicité de la solution formelle de (7.35), i.e. au théorème 6.4, et à la construction des solutions de

la proposition 7.6 à partir des solutions de (7.35). Notons que (7.47) entraîne, pour $\eta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} z_\ell^\pm(x, \eta) &= \eta^{-D} (x^D B_0(x) + \mathcal{O}(\eta)) \text{ pour } x \in \pm V_\ell(\eta), |x| > d, \\ z_\ell^\pm(x, \eta) &= Z_0^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right) + \mathcal{O}(\eta) \text{ pour } |x| \leq K|\eta|. \end{aligned} \quad (7.48)$$

pour tout $K > 0$. Comme dans la preuve du théorème 7.5, la dernière relation est une conséquence de (7.47) et du fait que l'équation intérieure est régulièrement perturbée.

Comme nous l'avons vu dans la preuve du théorème 7.5, la condition (a) est équivalente aux conditions $Z_0^+ = Z_0^- =: Z_0$ et $H_n^+ = H_n^- =: H_n$ pour tout n . Puisque le développement asymptotique est Gevrey d'ordre $\frac{1}{p}$ en η , ceci entraîne que les wronskiens $[z_\ell^+, z_\ell^-]$ sont exponentiellement petits. Il existe donc $s > 0$ tel que

$$[z_\ell^+, z_\ell^-](\eta) = \mathcal{O}(e^{-s/|\eta|^p}) \quad (7.49)$$

quand $\ell \in \{-L, \dots, L\}$ et $\eta \in S_\ell$. Quitte à réduire ρ , on peut supposer que $\rho^p < s$.

On a aussi besoin de solutions avec un comportement asymptotique complémentaire aux fonctions z_ℓ^\pm . Pour les construire, on effectue le changement de variable $z = e^{x^p/\varepsilon} w$ qui transforme (7.30) en

$$\varepsilon w'' + p x^{p-1} w' + \tilde{g}(x, \varepsilon) w = 0 \text{ où } \tilde{g}(x, \varepsilon) = g(x, \varepsilon) + p(p-1)x^{p-2}. \quad (7.50)$$

Cette équation est très similaire à (7.30), mais le signe du coefficient de la dérivée a changé. On la traite de manière analogue à (7.30) – la seule différence est que les montagnes et les vallées de l'équation de Riccati

$$\varepsilon u' = -p x^{p-1} u - \tilde{g}(x, \varepsilon) - u^2 \quad (7.51)$$

satisfaites par $u = \varepsilon w'/w$ ont été interchangées par rapport à celles de (7.35). On obtient ainsi, avec μ, γ, L, η_0 et ρ comme avant, des solutions $v_\ell^\pm(x, \eta)$, $\ell = -L, \dots, L$ de (7.30) définies, holomorphes et bornées quand $\eta \in S_\ell = S(\ell \frac{\pi}{2pL} - \gamma, \ell \frac{\pi}{2pL} + \gamma, \eta_0)$ et $x \in \tilde{V}_\ell^\pm = \pm V(-\frac{\pi}{2p} + \ell \frac{\pi}{2pL} + 2\gamma, \frac{5\pi}{2p} + \ell \frac{\pi}{2pL} - 2\gamma, \rho, \mu|\eta|)$ ayant des DAC généralisés

$$v_\ell^\pm(x, \eta) \sim \frac{1}{p} \tilde{Z}_0^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right) e^{-\tilde{R}(\varepsilon) \log(x^p + \varepsilon)} \left(\tilde{B}_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{B}_n(x) + \tilde{H}_n^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right) \right) \eta^n \right) \quad (7.52)$$

où \tilde{Z}_0^\pm sont les uniques solutions de (7.38) avec $\tilde{Z}_0^\pm(X) \sim e^{X^p} X^{-D-p+1} (1 + \mathcal{O}(X^{-1}))$ quand $\arg(\pm X) = \frac{\pi}{p}$, $|X| \rightarrow \infty$, les \tilde{B}_n sont analytiques sur $D(0, \rho)$, \tilde{B}_0 ne s'annule pas, $\tilde{B}_0(0) = 1$ et enfin les \tilde{H}_n sont holomorphes dans $\pm V(-\frac{\pi}{2p} + 2\gamma, \frac{5\pi}{2p} - 2\gamma, \infty, \mu)$ et admettent des développements asymptotiques sans termes constants quand $X \rightarrow \pm\infty$. Notons encore que (7.52) entraîne, comme pour les z_ℓ^\pm , quand $\eta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} v_\ell^\pm(x, \eta) &= e^{x^p/\eta^p} \left(\left(\frac{x}{\eta}\right)^{-D-p+1} \tilde{B}_0(x) + \mathcal{O}(\eta) \right) \text{ pour } x \in \tilde{V}_\ell^\pm(\eta), |x| \geq d, \\ v_\ell^\pm(x, \eta) &= \tilde{Z}_0^\pm\left(\frac{x}{\eta}\right) + \mathcal{O}(\eta) \text{ pour } |x| \leq K|\eta| \end{aligned} \quad (7.53)$$

ainsi que $v_0^\pm(x, \eta) = \mathcal{O}(e^{x^p/\eta^p})$ quand $\eta > 0$ et $\pm x \in [0, \rho]$; le fait que l'axe réel négatif descende dans une vallée de (7.51) implique que ceci reste vrai pour v_ℓ^- et tout l'intervalle $[a, 0]$.

En utilisant les développements extérieurs de $z_{a|b}$, les estimations (7.48) et (7.53), et la définition des wronskiens, on obtient

$$[z_a, v_\ell^-](\eta) \asymp \eta^{D-1}, [z_b, v_\ell^+](\eta) \asymp \eta^{D-1}, [z_\ell^\pm, v_\ell^\pm](\eta) \asymp \eta^{-1} \quad (7.54)$$

ainsi que $[v_\ell^+, v_\ell^-](\eta) = \mathcal{O}(\eta^{-1})$, où le symbole $f(\eta) \asymp g(\eta)$ signifie ici que le quotient $f(\eta)/g(\eta)$ tend vers une limite non nulle quand $\eta \rightarrow 0$.

La démonstration de (7.46) utilise le théorème de Phragmén-Lindelöf et suit celle de (7.3). Étant donné $\delta, d > 0$ petit, notons $D^-(\delta, d)$ le domaine contenant $[\tilde{a}, -d]$ dont l'image par $F(x) = x^p$ est le triangle de sommets $F(\tilde{a}), iF(\tilde{a}) \tan \delta, -iF(\tilde{a}) \tan \delta$ privé du disque centré en 0 de rayon d . De même, soit $D^+(\delta, d)$ le domaine contenant $[d, \tilde{b}]$ dont l'image par F est le triangle de sommets $F(\tilde{b}), iF(\tilde{b}) \tan \delta, -iF(\tilde{b}) \tan \delta$ privé du disque centré en 0 de rayon d . Si on choisit δ assez petit, pour $\tilde{\delta} > \delta$, $\tilde{\delta}$ arbitrairement proche de δ et pour η_0, d assez petit, les solutions $z_a(x, \eta)$, resp. $z_b(x, \eta)$, sont holomorphes bornées dans le secteur $S = S(-\frac{\pi}{2p} + \frac{\tilde{\delta}}{p}, \frac{\pi}{2p} - \frac{\tilde{\delta}}{p}, \eta_0)$ et pour x dans $D^-(\delta, d)$, resp. $D^+(\delta, d)$. Ceci est classique.

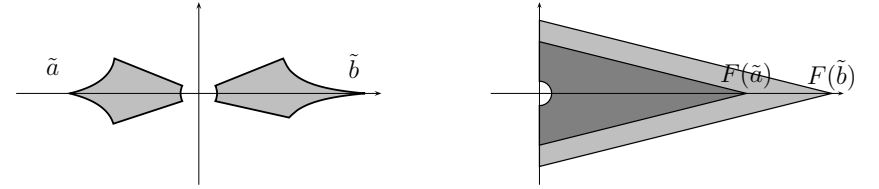


FIGURE 7.5 – Les domaines $D^-(\delta, d)$, $D^+(\delta, d)$ et leurs images par $F(x) = x^4$. Ici encore l'échelle n'est pas respectée entre les deux dessins pour une meilleure visibilité.

Considérons maintenant $\tilde{\delta} > 0$ tel que $F(\tilde{a}) \sin \tilde{\delta} < \rho^p$ et $\delta \in]0, \tilde{\delta}[$ arbitraire. Soit $\ell \in \{-L, \dots, L\}$ et $\eta \in S_\ell \cap S$, $\arg \eta = \psi$. Alors $z_b(x, \eta)$ et $z_\ell^+(x, \eta)$ sont holomorphes bornées sur un voisinage du point $x = T e^{i\psi}$ où $T^p = F(\tilde{a}) \sin \delta$. On en déduit avec (7.48) que

$$[z_b, z_\ell^+](\eta) = \mathcal{O}\left(|\eta|^{-D} \exp\left(-\left(T e^{i\psi}\right)^p / \eta^p\right)\right) = \mathcal{O}\left(|\eta|^{-D} e^{-T^p/|\eta|^p}\right) \quad (7.55)$$

quand $\eta \in S_\ell \cap S$. De manière analogue, on montre que $[z_a, z_\ell^-](\eta) = \mathcal{O}\left(|\eta|^{-D} e^{-T^p/|\eta|^p}\right)$ quand $\eta \in S_\ell \cap S$.

La formule (7.45) appliquée à z_a, z_ℓ^-, z_ℓ^+ et v_ℓ^- s'écrit

$$[z_a, z_\ell^-][z_\ell^+, v_\ell^-] - [z_a, z_\ell^+][z_\ell^-, v_\ell^-] + [z_a, v_\ell^-][z_\ell^+, z_\ell^-] = 0.$$

Avec (7.49), la majoration de $[z_a, z_\ell^-]$ ci-dessus et (7.54), ceci implique que le wronskien $[z_a, z_\ell^+]$ satisfait $[z_a, z_\ell^+](\eta) = \mathcal{O}\left(|\eta|^{-D} e^{-T^p/|\eta|^p}\right)$. En appliquant (7.45) à

z_a, z_ℓ^-, v_ℓ^+ et v_ℓ^- , on obtient $[z_a, v_\ell^+](\eta) \asymp \eta^{D-1}$; de manière analogue, on obtient

$$[z_b, v_\ell^-](\eta) \asymp \eta^{D-1}. \quad (7.56)$$

En appliquant (7.45) cette fois à z_a, z_ℓ^+, z_b et v_ℓ^+ et en utilisant (7.55), on obtient $[z_a, z_b](\eta) = \mathcal{O}(e^{-T^p/|\eta|^p})$ quand $\eta \in S_\ell \cap S$. Comme l'union des S_ℓ couvre S , ceci donne

$$[z_a, z_b](\eta) = \mathcal{O}(e^{-T^p/|\eta|^p})$$

pour $\eta \in S$.

Pour $p|\arg \eta| = \frac{\pi}{2} - \tilde{\delta}$, cette majoration implique $[z_a, z_b](\eta) = \mathcal{O}(\exp(-q \frac{F(\tilde{a})}{\eta^p}))$ avec $q = \frac{\sin \tilde{\delta}}{\sin \delta}$ arbitrairement proche de 1. D'après le théorème de Phragmén-Lindelöf, ceci reste valide pour $\arg \eta = 0$. Ceci démontre enfin (7.46).

La formule (7.44) appliquée à z_b, z_0^+ et v_0^+ donne

$$[z_b, z_0^+]v_0^+ + [z_0^+, v_0^+]z_b + [v_0^+, z_b]z_a = 0.$$

Avec la majoration (7.55), les estimations (7.54) et avec $v_0^+(x, \eta) = \mathcal{O}(e^{x^p/\eta^p})$ pour $x \in [0, d]$, $\eta > 0$, ceci montre que z_b est exponentiellement proche d'une solution proportionnelle à $\eta^D z_0^+$ sur $[0, d]$ et tend donc vers une limite aussi sur cet intervalle, si $d < T$. Le coefficient de proportionnalité, $\frac{[z_b, v_0^+]}{[z_0^+, v_0^+]} \eta^{-D}$, dépend de η mais tend vers une limite non nulle lorsque η tend vers 0. En utilisant (7.56), on traite de la même manière z_b, z_0^- et v_0^- sur $[-d, 0]$. Enfin (7.44) appliquée à z_b, z_a et v_0^- donne

$$[z_b, z_a]v_0^- + [z_a, v_0^-]z_b + [v_0^-, z_b]z_a = 0.$$

La majoration (7.46) entraîne alors, avec (7.54) et $v_0^-(x, \eta) = \mathcal{O}(e^{x^p/\eta^p})$ sur $[a, 0]$, que z_b reste exponentiellement proche d'une solution proportionnelle à z_a sur $[a, -d]$ aussi; c'est donc une solution résonante globale.

Si la condition du théorème 7.5 (b) est satisfaite, alors celle de 7.5 (a) aussi. La solution z_b est donc une solution résonante globale et il ne reste plus qu'à montrer que toutes ses dérivées restent bornées. D'après la preuve du théorème 7.5 (b), les dérivées de $\eta^D z_\ell^\pm(x, \eta)$ restent bornées sur $\pm[0, d]$; puisque z_b est exponentiellement proche d'elles, ceci reste vrai pour z_b . Enfin à cause de l'équation différentielle, toutes les dérivées de z_a restent bornées sur $[a, -d]$; puisque z_b est exponentiellement proche d'elle, il suit que z_b est une solution \mathcal{C}^∞ -résonante globale sur tout $[a, b]$. \square

8 Remarques historiques.

La littérature concernant le matching, i.e. *the method of matched asymptotic expansions* est abondante. C'est le sujet principal du livre général de W. Eckhaus [15] et des chapitres VII et VIII du livre de W. Wasow [42]. Dans ce dernier livre, la méthode est présentée pour des systèmes linéaires d'équations différentielles singulièrement perturbées.

Le livre de Wasow présente aussi une méthode alternative au matching et aux DAC pour les systèmes de dimensions 2 : celle de la simplification uniforme en une équation de fonctions spéciales. Cette méthode est aussi le sujet du mémoire de Y. Sibuya [34]. Sous certaines conditions, l'équation $\varepsilon y' = A(x, \varepsilon)y$ en \mathbb{C}^2 avec $A(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2/4 & 0 \end{pmatrix}$ peut être réduite

à $\varepsilon z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{x^2}{4} + \varepsilon c(\varepsilon) & 0 \end{pmatrix} z$ par une transformation $y = T(x, \varepsilon)z$, où $T(x, \varepsilon)$ admet un développement asymptotique quand $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformément dans un voisinage de $x = 0$. Comme l'équation réduite est équivalente à $\varepsilon^2 u'' = (\frac{x^2}{4} + \varepsilon c(\varepsilon))u$ et peut donc être ramenée à $\frac{d^2 Z}{dX^2} = (\frac{X^2}{4} + c(\varepsilon))Z$ par $Z(X, \varepsilon^{1/2}) = z(\frac{x}{\varepsilon^{1/2}}, \varepsilon)$, on pourrait voir cette simplification uniforme comme une séparation de l'asymptotique en une partie lente $T(x, \varepsilon)$ et une partie rapide venant de l'équation réduite. Il serait intéressant de comparer cette approche en détails avec le DAC.

Pour décrire des couches limites, des DAC dans le cas régulier (comme dans le paragraphe 6.1, mais sans étudier leur caractère Gevrey) étaient étudiés dans plusieurs travaux. Nous mentionnons Vasil'eva-Butuzov [39] et Benoît-El Hamidi-Fruchard [4].

Nous avons trouvé peu d'articles contenant des analogues de DAC au voisinage de points tournants avec une importante exception : la thèse de Th. Forget [16]. Il utilise une variante des DAC pour obtenir des approximations uniformes de solutions (et valeurs) canards d'équations analogues à (6.11); ceci a été mentionné à plusieurs endroits dans notre mémoire (parties 2.17, 2.6 et 7.1).

Parmi l'abondante littérature concernant les DAC classiques et le matching, outre les travaux de W. Eckhaus [15] et W. Wasow [41, 42] déjà cités, on peut mentionner les travaux de L. A. Skinner [36, 37, 38] et de L. E. Fraenkel [17]. Chacun de ces auteurs a mis en place un formalisme de "composite asymptotic expansions". Par exemple L. E. Fraenkel définit des opérateurs E_p et H_p qui, dans notre contexte, consistent essentiellement à prendre les p premiers termes du développement extérieur, resp. intérieur, d'une fonction $f = f(x, \varepsilon)$. Il montre ensuite que la fonction $(E_p + H_p - E_p H_p)f$ est une approximation à l'ordre p de f en ε uniformément pour $x \in [0, r]$. Si l'on répartit judicieusement les termes de $E_p H_p f$ pour en regrouper certains avec $E_p f$ et d'autres avec $H_p f$, le résultat semble être les premiers termes d'un DAC pour f . Toutefois L. E. Fraenkel ne fait pas une étude systématique de ces opérateurs. Il démontre cette approximation uniforme en faisant l'hypothèse *a priori* que f admet une approximation intérieure et une approximation extérieure et que les régions de validité s'intersectent ("overlapping assumption"). Il ne montre pas la stabilité de ces développements par produit, dérivation, intégration ou composition à gauche ou à droite par les fonctions d'une variable. Par ailleurs, seules des sommes finies sont prises

en compte. Enfin l'aspect Gevrey, indispensable pour les applications à la perturbation singulière, est absent.

Mentionnons encore quelques travaux liées à notre mémoire. Le lien avec les travaux d'Éric Matzinger [27, 28, 29] a été détaillé dans la partie 6.3. Le lien entre un DAC sur une couronne en $X = x/\eta$ et l'asymptotique monomiale de [7] est détaillé dans la première remarque après la définition 3.9. Le lien avec les travaux de Peter De Maesschalck a été présenté dans la remarque 1 après le théorème 7.1 et dans la remarque après le théorème 7.8.

Références

- [1] R. C. Ackerberg, R. E. O'Malley, Boundary layer Problems Exhibiting Resonance, *Studies in Appl. Math.* 49 no 3 (1970) 277–295
- [2] W. Balser, *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York, 2000
- [3] E. Benoît, J.-L. Callot, F. Diener, M. Diener, Chasse au canard, *Collect. Math.* 31, 1-3 (1981) 37–119
- [4] E. Benoît, A. El Hamidi, A. Fruchard, On combined asymptotic expansions in singular perturbations, *Electron. J. Diff. Eqns.*, 2002, No. 51 (2002) 1–27
- [5] E. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfke, G. Wallet, Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes-rapides à point tournant, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* Vol. VII, n° 4 (1998) 627–658
- [6] E. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfke, G. Wallet, *Overstability : Toward a global study*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I, 326 (1998) 873–878
- [7] M. Canalis-Durand, J. Mozo-Fernandez, R. Schäfke, Monomial summability and doubly singular differential equations, *J. Differential Equations* 233 (2007) 485–511
- [8] M. Canalis-Durand, J.-P. Ramis, R. Schäfke, Y. Sibuya, Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations, *J. Reine Angew. Math.* 518 (2000) 95–129
- [9] P. De Maesschalck, On maximum bifurcation delay in real planar singularly perturbed vector fields, *Nonlinear Analysis* 68,3 (2008) 547–576
- [10] P. De Maesschalck, Ackerberg-O'Malley resonance in boundary value problems with a turning point of any order, *Commun. Pure Appl. Anal.* 6, 2 (2007) 311–333
- [11] P. De Maesschalck, F. Dumortier, Canard solutions at non-generic turning points, *Trans. Amer. Math. Soc.* 358 (2006), 2291–2334
- [12] F. Diener, M. Diener, *Nonstandard analysis in practice*, Universitext, Springer, Berlin, 1995
- [13] M. Diener, Regularizing microscopes and rivers, *SIAM J. Math. Anal.* 25 (1994) 148–173.
- [14] A. A. Dorodnitsyn, Asymptotic solution of the van der Pol equation, *Priklad. Mat. Mekh.* 11 (1947) 313–328 (en russe)
- [15] W. Eckhaus, *Asymptotic analysis of singular perturbations*, Studies in Mathematics and its Applications, 9. North-Holland, 1979
- [16] Th. Forget, *Points tournants dégénérés*, Thèse de Doctorat, Université de La Rochelle, 2007
- [17] L. E. Fraenkel, On the method of matched asymptotic expansions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 65 (1969) 209–284
- [18] A. Fruchard, E. Matzinger, Matching and singularities of canard values, In *Proceedings of "Analyzable functions and Applications"*, ICMS, Edinburgh, 17-21 June 2002, O. Costin, M.-D. Kruskal, A. Macintyre Ed., Contemporary Mathematics (2005) 317–335
- [19] A. Fruchard, R. Schäfke, Exceptional complex solutions of the forced van der Pol equation, *Funkcialaj Ekvacioj* 42, 2 (1999) 201–223
- [20] A. Fruchard, R. Schäfke, Overstability and resonance, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 53, 1 (2003) 227–264
- [21] A. Fruchard, R. Schäfke, A survey of some results on overstability and bifurcation delay, *Discrete Cont. Dyn. Syst. S (DCDS-S)* 2, 4 (2009) 931–965
- [22] A. Fruchard, R. Schäfke, De nouveaux développements asymptotiques combinés pour la perturbation singulière, Actes du Colloque à la mémoire d'Emmanuel Isambert, 2010 ?
- [23] V. Gautheron, E. Isambert, Finitely differentiable ducks and finite expansions, in *Dynamic Bifurcations*, E. Benoît Ed., Lect. Notes Math. 1493 (1991) 40–56
- [24] E. Isambert, Nonsmooth Ducks and Regular Perturbations of Rivers, I et II, *J. Math. Anal. Appl.* 200 (1996) 14–33 et 289–306
- [25] P. A. Lagerstrom, *Matched asymptotic expansions : Ideas and techniques*, Applied Mathematical Sciences 76, Springer-Verlag, New York, 1988
- [26] C. Lobry, Dynamic Bifurcations, in *Dynamic Bifurcations*, E. Benoît Ed., Lect. Notes Math. 1493 (1991) 1–13
- [27] E. Matzinger, *Étude d'équations différentielles ordinaires singulièrement perturbées au voisinage d'un point tournant*, Thèse, Preprint IRMA 2000/53, Strasbourg, 2000
- [28] E. Matzinger, Étude des solutions surstables de l'équation de van der Pol, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 10, 4 (2001) 713–744

- [29] E. Matzinger, Asymptotic behaviour of solutions near a turning point : the example of the brusselator equation, *J. Differ. Equations* 220, 2 (2006) 478–510
- [30] E. F. Mischenko, N. Kh. Rozov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Plenum Press, New York and London, 1980
- [31] J.-P. Ramis, Dévissage Gevrey, *Astérisque*, 59-60 (1978) 173–204
- [32] J.-P. Ramis, Les séries k -sommables et leurs applications, In *Complex Analysis, Microlocal Calcul and Relativistic Quantum Theory*, Lect. Notes Physics 126 (1980) 178–199
- [33] Y. Sibuya, *Linear differential equations in the complex domain, problems of analytic continuation*, American Mathematical Society, Providence (RI), 1990
- [34] Y. Sibuya, Uniform simplification in a full neighborhood of a transition point, *Memoirs of the American Mathematical Society*, No. 149, 1974
- [35] Y. Sibuya, A theorem concerning uniform simplification at a transition point and a problem of resonance, *SIAM J. Math. Anal.* 12, 5 (1981) 653–668
- [36] L. A. Skinner, Uniform solution of boundary layer problems exhibiting resonance, *SIAM J. Appl. Math.* 47, 2 (1987) 225–231
- [37] L. A. Skinner, Matched expansion solutions of the first-order turning point problem, *SIAM J. Math. Anal.* 25, 5 (1994) 1402–1411
- [38] L. A. Skinner, A class of singularly perturbed singular Volterra integral equations, *Asymptot. Anal.* 22, 2 (2000) 113–127
- [39] A. B. Vasil’eva, V. F. Butuzov, Asymptotic expansions of the solutions of singularly perturbed equations, *Izdat. “Nauka”* (en russe) Moscou, 1973
- [40] G. Wallet, Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension un, *Ann. Inst. Fourier*, 40, 3 (1990) 557–595
- [41] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New York, 1965
- [42] W. Wasow, *Linear Turning Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 1985

Adresses des auteurs :

Augustin Fruchard
 Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications
 Faculté des Sciences et Techniques, Université de Haute Alsace
 4, rue des Frères Lumière, F-68093 Mulhouse cedex, France

Courriel : augustin.fruchard@uha.fr

Reinhard Schäfke
 Institut de Recherche Mathématique Avancée
 U.F.R. de Mathématiques et Informatique
 Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France
 Courriel : schaeffe@unistra.fr